Niekoľko príkladov na precvičenie k prednáške o neporuchových metódach kvantovej teórie poľa

1. Vychádzajúc z definícií “prednej” a “zadnej” mriežkovej derivácie

$$\nabla_\mu f(x) \equiv \frac{1}{a}\left[f(x+a\hat{\mu}) - f(x)\right] \qquad \nabla_\mu^* f(x) \equiv \frac{1}{a}\left[f(x) - f(x-a\hat{\mu})\right]$$

dokážte, že

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \left[\nabla_\mu^*, \nabla_\nu^*\right] = [\nabla_\mu, \nabla_\nu^*] = 0$$

a

$$\nabla_\mu\left[f(x)g(x)\right] = \left[\nabla_\mu f(x)\right]g(x) + f(x)\left[\nabla_\mu g(x)\right] + a\left[\nabla_\mu f(x)\right]\left[\nabla_\mu g(x)\right]$$

(cez index μ sa *nesčituje*!). Ďalej dokážte, za predpokladu translačnej invariantnosti vo všetkých časopriestorových smeroch, že

$$\sum_x g(x)\Delta f(x) = -\sum_x \sum_{\mu=1}^{4}\left[\nabla_\mu g(x)\right]\left[\nabla_\mu f(x)\right] = -\sum_x \sum_{\mu=1}^{4}\left[\nabla_\mu^* g(x)\right]\left[\nabla_\mu^* f(x)\right],$$

kde $\Delta = \sum_{\mu=1}^4 \nabla_\mu \nabla_\mu^* = \sum_{\mu=1}^4 \nabla_\mu^* \nabla_\mu$ je diskretizovaný Laplaceov operátor.

2. Určte vlastné hodnoty operátora $(-\Delta)$ z príkladu 1 na konečnej mriežke rozmeru La (vo všetkých smeroch) s periodickými okrajovými podmienkami a ich degeneráciu.

3. V spojitom časopriestore je transformačný vzťah pre neabelovský kalibračný potenciál nasledovný:

$$A_\mu(x) \to g(x)A_\mu(x)g^{-1}(x) + g(x)\partial_\mu g^{-1}(x), \qquad g(x) \in \mathrm{SU}(N).$$

Naivne by sme ho na mriežku mohli prepísať v tvare:

$$A_\mu(x) \to g(x)A_\mu(x)g^{-1}(x) + g(x)\nabla_\mu g^{-1}(x), \qquad g(x) \in \mathrm{SU}(N).$$

Presvedčte sa, že naivný mriežkový prepis nereprodukuje spojitý transformačný zákon. Konrétnejšie: aplikujte zloženú transformáciu s funkciou $g(x) = g_1(x)\cdot g_2(x)$ v spojitom priestore a na mriežke a porovnajte výsledky.

$\boxed{\textbf{4.}}$ V prípade kalibračnej grupy SU(N) označme $A_\mu(x) = A_\mu^a(x) \cdot T^a$ kalibračný potenciál v spojitom časopriestore, pomocou ktorého linkovú premennú $U_\mu(x)$ na mriežke definujeme ako

$$U_\mu(x) = e^{iaA_\mu(x)}, \qquad A_\mu^\dagger(x) = A_\mu(x).$$

Pomocou tejto definície odvoďte výraz pre stopu plakety

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}(x) \equiv \mathrm{Tr}\left[U_\mu(x)U_\nu(x+a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x+a\hat{\nu})U_\nu^\dagger(x)\right]$$

$$\overset{a\to 0}{=} N - \frac{a^4}{2}\mathrm{Tr}\left[F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)\right] + \mathcal{O}(a^5),$$

pričom

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + i[A_\mu(x), A_\nu(x)]$$

je spojitý výraz pre tenzor poľa.
Návod: Zapíšte $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ ako Tr($S \cdot T$), kde $S = U_\nu^\dagger(x)U_\mu(x)$ a $T = U_\nu(x+a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x+a\hat{\nu})$, a na každú časť použite Bakerov–Campbellov–Hausdorffov vzorec

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]+\frac{1}{12}[B,[B,A]]+\dots}.$$

Využite tiež výrazy typu

$$A_\nu(x+a\hat{\mu}) = A_\nu(x) + a\partial_\mu A_\nu(x) + \mathcal{O}(a^2).$$

$\boxed{\textbf{5.}}$ Dokážte, že pre 2×2 matice platí vzťah

$$\det(A) = \tfrac{1}{2}\left[(\mathrm{Tr}(A))^2 - \mathrm{Tr}(A^2)\right].$$

Nájdite analogický vzťah pre 3×3 matice.

$\boxed{\textbf{6.}}$ Na prednáškach sme si ukázali, že v limite silnej väzby ($\beta \to 0$) je strunové napätie v SU(N) kalibračnej teórii s wilsonovským účinkom dané výrazom (ak zvolíme $a = 1$):

$$\sigma = -\ln\left(\frac{\beta}{2N^2}\right) + \mathcal{O}(\beta).$$

Odvoďte vedúci člen v limite silnej väzby pre plaketovú korelačnú funkciu

$$C(T) = \left\langle \mathcal{P}_{12}(\vec{0}, T)\mathcal{P}_{12}(\vec{0}, 0)\right\rangle,$$

kde $\mathcal{P}_{\mu\nu}(x)$ bolo definované v príklade č. 3 a $x = (\vec{x}, t)$. Z exponenciálneho poklesu korelačnej funkcie $C(T)$ pre veľké (euklidovské) časy T je možné určiť hmotnosť M_G najnižšieho stavu tzv. glueballu (viazaného stavu dvoch gluónov) pomocou vzťahu

$$C(T) \sim \exp(-M_G T) \quad \text{pre veľké } T.$$

Ukážte, že v limite silnej väzby

$$\frac{M_G}{\sigma} \approx 4.$$

$\boxed{\textbf{7.}}$ Uvažujme mriežkovú kalibračnú teóriu bez dynamických kvarkov s kalibračnou grupou SU(3). Nech je väzbová konštanta β dostatočne veľká, takže jej vzťah k mriežkovej konštante a dobre opisuje najnižší rád poruchovej teórie. O koľko musíme zväčšiť β, aby sa mriežková konštanta a zmenšila na polovicu?
Návod: Využite Gell-Mannovu–Lowovu rovnicu pre väzbovú konštantu v najnižšom ráde.

$\boxed{\textbf{8.}}$ Uvažujme fermiónovú časť účinku QCD s wilsonovskými kvarkami:

$$S_F[U, \bar{\psi}, \psi] = \sum_x \bar{\psi}(x)(\hat{D}\psi)(x) = \sum_{x,y} \bar{\psi}(x) D_{xy} \psi(y),$$

kde kvarková matica (Wilsonov–Diracov operátor) je

$$D_{xy} = \delta_{xy} - \kappa \sum_{\mu=0}^{3} \left\{ \delta_{y,x+\hat{\mu}} (\mathbf{1} - \gamma_\mu) U_\mu(x) + \delta_{y,x-\hat{\mu}} (\mathbf{1} + \gamma_\mu) U_\mu^\dagger(x) \right\}.$$

Ukážte, že $\gamma_5 \hat{D}^\dagger \gamma_5 = \hat{D}$ a determinant $\hat{D}$ je reálny.
Návod: Využite vzťahy $\gamma_\mu = \gamma_\mu^\dagger$ a $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$.

$\boxed{\textbf{9.}}$ Nech nejaký Diracov operátor $\hat{D}$ spĺňa podmienku $\gamma_5 \hat{D}^\dagger \gamma_5 = \hat{D}$ a zároveň tzv. Ginspargov–Wilsonov vzťah

$$\{\hat{D}, \gamma_5\} = a \hat{D} \gamma_5 \hat{D}.$$

Dokážte, že vlastné hodnoty λ operátora $\hat{D}$ ležia na kružnici v komplexnej rovine:

$$\lambda = r(1 + e^{i\phi}), \quad \text{kde} \quad r = \frac{1}{a}.$$

$\boxed{\textbf{10.}}$ (Vyberte si alternatívu **a** alebo **b** alebo obe.)
a. Navrhnite "heat-bath" algoritmus pre U(1) kalibračnú teóriu s wilsonovským účinkom.[1]
b. Naprogramujte (v ľubovoľnom jazyku) a odlaďte program na simuláciu jednorozmerného Isingovho modelu s interakciou medzi najbližšími susedmi. V simuláciách určte vnútornú energiu systému ako funkciu teploty a porovnajte ju s presným výsledkom.

[1] Ak si nebudete vedieť dať rady, hľadajte inšpiráciu v napr. v článku D. Loison et al., Eur. Phys. J. B 41 (2004) 395 [arXiv:cond-mat/0409422] alebo na http://www.damienloison.com/fast_algorithms/.