

Fyzikálny ústav Centra elektro-fyzikálneho výskumu  
Slovenskej akadémie vied

RNDr. Štefan Olejník

VPLYV ŠTRUKTÚRY VÁKUA V KVANTOVEJ CHROMODYNAMIKE  
NA VLASTNOSTI ŤAŽKÝCH KVARKÓNÍ

Kandidátska dizertačná práca

Bratislava, október 1984

## POĎAKOVANIE

Rád by som vyjadril svoju vďačnosť môjmu školiteľovi prof. RNDr. Jánovi Pišútovi, DrSc., za starostlivé vedenie ašpirantúry, za mnohé cenné diskusie, impulzy, rady a pripomienky. Ďakujem aj RNDr. Jozefovi Lánikovi, CSc., ktorý mi bol školiteľom v počiatočnom štádiu ašpirantúry, a svojou podporou i radami tiež prispel k jej dokončeniu.

OBSAH

	Str.
Hlava I.	PREHĽAD O SÚČASNOM STAVE PROBLEMATIKY .. 1
Kap. 1.	<u>Úvod</u> ..... 1
1.1.	Prehľad obsahu práce ..... 5
1.2.	Základné informácie o kvantovej chromo- dynamike ..... 8
Kap. 2.	<u>Problém štruktúry vákua v QCD</u> ..... 12
2.1.	Kvalitatívne vlastnosti kvantovej chro- modynamiky v rovine ..... 12
2.2.	Parametre vákua ..... 19
Kap. 3.	<u>Ťažké kvarkóniá</u> ..... 21
3.1.	Prehľad experimentálnych údajov o šar- móniu a botomóniu ..... 21
3.2.	Potenciálové modely ťažkých kvarkónií .. 24
Hlava II.	CIELE DIZERTÁCIE ..... 32
Hlava III.	METÓDA VÝPOČTU VPLYVU VÁKUOVÝCH KONDEN- ZÁTOV NA VLASTNOSTI VEĽMI ŤAŽKÝCH KVAR- KÓNÍ ..... 33
Kap. 4.	<u>Najnižšie priblíženie</u> ..... 33
4.1.	Odhady základných vlastností coulombov- ských viazaných stavov ..... 34
4.2.	Základné myšlienky výpočtu vplyvu gluó- nového kondenzátu ..... 36
4.3.	Leutwylerov-Vološinov vzťah ..... 38
4.4.	Poznámka o neadekvátnosti potenciálové- ho prístupu ..... 40
Kap. 5.	<u>Všeobecnejšia metóda výpočtu</u> ..... 43
5.1.	Prečo najnižšie priblíženie nie je po- stačujúce ..... 43

5.2.	Popis metódy .....	44
5.3.	Cesta späť k priblíženiu Leutwylera a Vološina .....	55
5.4.	Dvojkanálový oscilátorový model .....	58
Hlava IV.	SÚHRN VÝSLEDKOV, ZÍSKANÝCH POMOCOU POPÍSANEJ METÓDY, A JEJ OBMEDZENIA .....	67
Hlava V.	METÓDA SÚČTOVÝCH VZŤAHOV: VÝSLEDKY A POUČENIA, ZÍSKANÉ PRI JEJ POUŽITÍ NA VÝPOČET VLASTNOSTÍ TOPÓNÍÍ .....	70
Kap. 6.	<u>Úvod do chromodynamických súčtových vzťahov</u> .....	70
6.1.	Základné myšlienky súčtových vzťahov ...	71
6.2.	Prehľad aplikácií súčtových vzťahov ....	74
Kap. 7.	<u>Topóniové súčtové vzťahy</u> .....	76
7.1.	Výpočet coulombovských korekcií .....	78
7.2.	Určenie vlastností základného stavu topónia .....	87
Kap. 8.	<u>Súčtové vzťahy pre jednoduché sústavy vo vonkajšom poli</u> .....	92
8.1.	Súčtové vzťahy ŠVZ v kvantovej mecha- nike .....	93
8.2.	Jednorozmerný lineárny harmonický osci- látor v elektrickom poli .....	95
8.3.	Starkov jav v atóme vodíka .....	101
Hlava VI.	ZÁVERY PRE ĎALŠÍ ROZVOJ PROBLEMATIKY ..	110
DODATKY		
A.	Gluónový kondenzát .....	A 1
B.	Greenova funkcia pre coulombovský hamiltonián ....	B 1
C.	Podrobnejší výpočet maticového elementu v Leut- wylerovom-Vološinovom vzťahu .....	C 1

D. Maticové elementy operátora $K(E)$ v oscilátorovom modeli .....	D 1
E. Vzťah polarizačného operátora k nerelativistickej Greenovej funkcii .....	E 1
F. Odvodenie polarizačného operátora t-kvarkov v nerelativistickej limite .....	F 1
G. Niektoré vlastnosti Laplaceovej transformácie .....	G 1
H. Výpočet $M(\tau)$ pre topónium .....	H 1
I. Výpočet prvých členov Bornovho radu pre euklidovskú Greenovu funkciu LHO v elektrickom poli .....	I 1
J. Výpočet prvých členov Bornovho radu pre euklidovskú Greenovu funkciu atómu vodíka v elektrickom poli .....	J 1
LITERATÚRA .....	L 1

ZOZNAM TABULIEK

	Str.
1.1 : Vlastnosti kvarkov .....	9
3.1 : Základné vlastnosti šarmóniových stavov .....	23
3.2 : Základné vlastnosti botomóniových stavov .....	25
4.1 : Základné vlastnosti coulombovských viazaných stavov .....	37
4.2 : Relatívna zmena hodnoty energie najnižšieho stavu kvarkónia podľa vzťahu (4.18) .....	40
4.3 : Porovnanie posunov energetických hladín ťažkého kvarkónia, počítaných pomocou interakčného potenciálu $\lambda_m G^2 r^4$ a pomocou Leutwyler-Vološinovho vzťahu .....	42
5.1 : Hodnoty niekoľkých koeficientov $a_{nl}$ v LV vzťahu .....	59
5.2 : (a) Priblíženie Ib - závislosť od veľkosti determinantu N.	
(b) Priblíženie II - závislosť od počtu členov $M$ v $G_8$ .....	66
7.1 : Koeficienty mocninného rozvoja funkcií $\phi(\gamma)$ a $\chi(\gamma)$ .....	85
8.1 : Energia základného stavu LHO vo vonkajšom elektrickom poli, získaná pomocou súčtových vzťahov pre úplnú euklidovskú Greenovu funkciu [vzťah (8.21)] .....	98
8.2 : Energia základného stavu LHO vo vonkajšom elektrickom poli, získaná pomocou súčtového vzťahu pre korekciu k euklidovskej Greenovej funkcii, spôsobenú poľom [vzťah (8.23)] .....	101
8.3 : Koeficienty mocninného rozvoja funkcie $\xi(\gamma)$ ....	106
8.4 : Energia základného stavu atómu vodíka v elektrickom poli určená zo súčtových vzťahov .....	107

ZOZNAM OBRÁZKOV

	Str.
3.1 : Energetické spektrum šarmóniových stavov .....	22
3.2 : Energetické spektrum botomóniových stavov .....	24
3.3 : Jednoglúónová výmena .....	27
3.4 : Rôzne úspešné fenomenologické potenciály .....	30
4.1 : Kvark-antikvarkový potenciál z jednoglúónovej výmeny: (a) v singletnom stave; (b) v oktetnom stave .....	35
5.1 : $Q\bar{Q}$ pár v konštantnom vákuovom kalibračnom poli ..	45
5.2 : Rozdelenie singletného hamiltoniánu na časti ....	47
5.3 : Slovník symbolov, ktoré vystupujú v obrázkoch	
5.4 - 5.7 .....	50
5.4 : Znázornenie identity, ktorú spĺňa kvarkóniová Greenova funkcia .....	51
5.5 : Uzavretá rovnica pre kvarkóniovú Greenovu funkciu - dôsledok predpokladu o vákuovej dominantnosti .....	53
5.6 : Znázornenie dvoch extrémnych možností pri riešení rovnice (5.27) .....	54
5.7 : Podstata priblíženia Leutwylera a Vološina .....	55
5.8 : Energia singletného základného stavu v Zalewského modeli pri $\omega = 0,5$ .....	64
7.1 : Grafy funkcií $\phi(\gamma)$ a $\chi(\gamma)$ .....	84
7.2 : Korekcia k hmotnosti $\xi$ ako funkcia $n$ .....	89
7.3 : Relatívna zmena elektrónovej šírky rozpadu $\xi$ ako funkcia $n$ .....	89
7.4 : Relatívna zmena hmotnosti $\xi$ -mezónu ako funkcia gluónového kondenzátu $G^2$ (pre $m_t = 40 \text{ GeV}/c^2$ ) .....	90
7.5 : Relatívna zmena šírky rozpadu $\xi$ ako funkcia $G^2$ (pre $m_t = 40 \text{ GeV}/c^2$ ) .....	90
7.6 : Hodnota $\omega = \delta m^4 [\alpha_s(m)]^6$ ako funkcia hmotnosti t-kvarku $m_t$ pri $G^2 = 0,012 \text{ GeV}^4$ .....	91
8.1 : Posun energetickej hladiny základného stavu LHO v závislosti od $\epsilon = (eE)^2/2m \omega^3$ .....	100

8.2 :	Grafy funkcií $\phi(\gamma)$ a $\xi(\gamma)$ .....	107
8.3 :	Energia základného stavu atómu vodíka v elek- trickom poli .....	108



## Hlava I. PREHĽAD O SÚČASNOM STAVE PROBLEMATIKY

### Kapitola 1. ÚVOD

Kvantová chromodynamika<sup>1)</sup> (angl. quantum chromodynamics, QCD) [1] sa dnes všeobecne považuje za jediného vážneho kandidáta na teóriu silných interakcií. Jednou vetou sa dá definovať ako lokálna kalibračná teória interakcií farebných kvarkov a gluónov s neabelovskou grupou symetrie  $SU(3)$  vo farbách  $[SU(3)_c]$ . Kvarky boli ako stavebné prvky silne interagujúcich častíc (hadronov) navrhnuté dávno, už pred dvadsiatimi rokmi [6, 7]. Čoskoro sa však ukázalo, že na vyriešenie problému vzťahu spinu a štatistiky kvarkov, ako aj na správny popis niektorých procesov (napr. rozpadu  $\pi^0$ -mezónu na dva fotóny, anihilácie elektrónu a pozitónu na hadróny) je potrebné, aby sa každý druh ("flavour") kvarkov vyskytoval v troch podobách, ktoré sa líšia jedí-  
ným novým kvantovým číslom - "farbou" [9]<sup>2)</sup>. Zároveň experimenty s hlbokým nepružným rozptylom elektrónov na protónoch na urýchľovači v Stanforde ukázali, že veľkú časť hybnosti protónu nesú nenabité konštituenty, tzv. gluóny. V rámci QCD hrá farba ústrednú úlohu, gluóny sú sprostredkovateľmi farebných interakcií medzi kvarkami.

Základné princípy, z ktorých kvantová chromodynamika vyrastá, sú princípy lorentzovskej invariantnosti, renormalizovateľnosti a lokálnej kalibračnej invariantnosti.

---

<sup>1)</sup> Prehľad o QCD poskytujú napr. články [2 - 5].

<sup>2)</sup> Vo svete hadronov sa okrem presnej farebnej  $SU(3)$  symetrie vyskytuje aj približná tzv.  $SU(3)_f$  symetria, symetria voči zámene kvarkov typu u, d, s (pozri napr. [8]). Z dnešného pohľadu je však len náhodnou symetriou, ktorá je dôsledkom skutočnosti, že hmotnosti u-, d- a s-kvarkov sú malé v porovnaní s charakteristickou škálou hadronových hmotností.

V tomto ohľade je QCD presnou kópiou kvantovej elektrodynamiky (QED), najpresnejšej teórie, akú majú fyzici v súčasnosti k dispozícii. Podstatný rozdiel je v tom, že kým kalibračné (fázové) transformácie v QED tvoria abelovskú grupu  $U(1)$ , v QCD lokálne kalibračné transformácie menia farbu kvarkov v ľubovoľnom bode časopriestoru a tvoria neabelovskú grupu  $SU(3)_c$ . Vďaka tomu má QCD dôležitú vlastnosť, ktorá je v štvorrozmernom časopriestore vlastná iba neabelovským kalibračným teóriám [10] - asymptotickú voľnosť [11, 12] (angl. asymptotic freedom). Pod asymptoticou voľnosťou sa chápe tá skutočnosť, že efektívna väzbová konštanta vzájomného pôsobenia medzi kvarkami sa blíži k nule, ak znižujeme ich vzdialenosť, a rastie so zväčšovaním vzdialenosti.<sup>1)</sup> Vďaka tejto vlastnosti je možné používať poruchovú metódu na výpočet predpovedí QCD pre niektoré procesy, pre ktoré sú podstatné interakcie málo vzdialených kvarkov, napr. pre hlboký nepružný rozptyl leptónov na nukleónoch. Predpovede poruchovej QCD kvalitatívne súhlasia s relevantnými experimentálnymi údajmi (viď napr. prehľady [17 - 22]).

Ak by sme sa však obmedzili len na tie javy a procesy, v ktorých je efektívna väzbová konštanta malá, odrezali by sme si prístup k celému súboru javov, ktorý by sme obrazne mohli nazvať "fyzikou veľkých hadrónových vzdialeností". Do tejto množiny spadá aj ťažiskový nerozriešený problém QCD - problém uväznenia farby. V reálnych experimentoch sa totiž dosiaľ nikdy nepozorovali voľné kvarky ani gluóny, ale iba ich viazané stavy, hadróny. Všeobecne vládne domnienka, že príčinou je tzv. uväznenie farby [23]: Kvarky a gluóny nemôžu existovať ako voľné častice, ale iba viazané v hadrónoch. Pritom všetky hadróny sú bez-

---

<sup>1)</sup> Veľmi názorné vysvetlenie asymptotickej voľnosti pochádza od Nielsena [13] a Hughesa [14] (viď aj [15, 16]), ktorí ukázali, že je dôsledkom skutočnosti, že gluónové vákuum je paramagnetickým prostredím.

farebné (sú farebnými singletmi).

Hypotézu o uväznení kvarkov sa dosiaľ nepodarilo dokázať. Je však isté, že cestu k riešeniu treba hľadať ne-poruchovými metódami [24, 25].

S uväznením farby súvisia i ďalšie problémy v rámci QCD: popis mechanizmu vzniku hadrónov z kvarkov a gluónov, interakcie hadrónov pri nízkych energiách, súvis charakteristík hadrónov (hmotností, magnetických momentov, rozpadových šírok, ...) s vlastnosťami kvarkov a gluónov, atď.

Na druhej strane s problémom uväznenia kvarkov úzko súvisí problém štruktúry základného stavu a jeho excitácií v QCD. Predpokladá sa, že základný stav (vákuum) v QCD nie je totožný s triviálnym vákuom (bez častíc a polí), ale je zložitou superpozíciou netriviálnych riešení pohybových rovníc [26]. Cez pochopenie zložitosti vákua QCD povedie cesta k pochopeniu štruktúry jeho excitácií, a teda aj dôvodu, prečo majú konečnú energiu iba farebné singlety, t. j. k vysvetleniu uväznenia farby.

Napriek všetkému úsiliu mnohých fyzikov je skutočná štruktúra vákua v QCD zatiaľ záhadou. Dôležitý krok smerom k výpočtu vlastností hadrónov v rámci QCD uskutočnila skupina fyzikov z Ústavu teoretickej a experimentálnej fyziky (ITEP) v Moskve [27]. Uvedomili si, že v skutočnosti na výpočet najjednoduchších charakteristík niektorých hadrónov nie je nevyhnutná úplná informácia o vákuu QCD; postačí aj znalosť niekoľkých parametrov, ktoré globálne charakterizujú vákuum. Sú to vákuové stredné hodnoty kombinácií kvarkových a gluónových polí, tzv. kondenzáty, napr. kvarkový kondenzát  $\langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle$ , gluónový kondenzát  $\langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle$  a i. [ $\psi$  a  $G_{\mu\nu}^a$  tu označujú kvarkové resp. gluónové polia.] Ich hodnoty sa určia porovnaním predpovedí teórie s vlastnosťami malého počtu hadrónov; vlastnosti ostatných sú potom už zafixované. (Podrobnejšie o tomto prístupe a jeho úspechoch pojednám v 6. kapitole.)

Nová pôda pre testovanie predpovedí QCD sa otvorila po r. 1974, keď bola objavená skupina  $\Psi$ -častíc [28, 29] s hmotnosťami vyše  $3 \text{ GeV}/c^2$ , a po r. 1977, keď bola objavená skupina  $\Upsilon$ (upsilon)-častíc s hmotnosťami  $\geq 9,5 \text{ GeV}/c^2$  [30]. Mezóny  $\Psi$  ( $\Upsilon$ ) sa v rámci kvarkového modelu interpretujú ako viazané stavy kvarku a antikvarku typu c (od slova charm) resp. b (od slova bottom) s hmotnosťou približne  $1,5 \text{ GeV}/c^2$  ( $4,8 \text{ GeV}/c^2$ ). Tieto častice zaujímajú významné miesto vo svete hadrónov prinajmenšom z troch dôvodov:

- i) ich konštituenty sú dostatočne ťažké, takže sú to v prvom priblížení nerelativistické systémy;
- ii) vďaka asymptotickej voľnosti je efektívna väzbová konštanta interakcie medzi kvarkom a antikvarkom malá, takže celý systém v mnohom pripomína pozitronium; a
- iii) neporuchové efekty (efekty štruktúry vákuua) sa tu prejavujú relatívne jednoducho.

Pre šarmóniá a botomóniá uvedené tvrdenia platia len veľmi približne (napr. relativistické efekty sú ešte podstatné), a to je zrejme dôvod, prečo sa nestali "vodíkovými atómami" silných interakcií, ako to predpovedali rané optimistické články [31]. Veľa nádejí sa preto vkladá do viazaných stavov kvarkov a antikvarkov typu t (top), ktorých objav sa očakáva na urýchľovačoch novej generácie.

Cieľom predkladanej kandidátskej dizertačnej práce je podrobné štúdium vplyvu štruktúry vákuua na vlastnosti veľmi ťažkých kvarkónií. Priekopnícke práce v tejto oblasti urobili Vološin [32] a Leutwyler [33]. Moja práca, hoci vychádza z rovnakých fyzikálnych predpokladov ako [32], [33], zovšeobecňuje ich prístupy v niekoľkých smeroch:

1. Navrhol som všeobecnejšiu metódu výpočtu vplyvu štruktúry vákuua na energetické hladiny ťažkých kvarkónií, ktorá Leutwylerove a Vološinove výsledky zahrňa ako prirodzené najnižšie priblíženie.

2. Poukázal som na potenciálnu relevantnosť členov, ktoré Vološin a Leutwyler zanedbávajú.

3. Vplyv gluónového kondenzátu na spektrá ťažkých kvarkónií som študoval aj metódou súčtových vzťahov. Súčtové vzťahy pre veľmi ťažké kvarkóniá sa ukázali značne zložitými v dôsledku osobitostí, ktoré sa neprejavili v prípade ľahších kvarkov, predovšetkým kvôli nevyhnutnosti zahrnúť vyššie poruchové (tzv. coulombovské) korekcie.

Zvyšok úvodnej kapitoly je rozdelený do dvoch častí. Prvá si kladie za cieľ poskytnúť stručný prehľad o obsahu práce, druhá zhrňa niekoľko heslovitých informácií o kvantovej chromodynamike.

### 1.1. Prehľad obsahu práce

Predkladaná kandidátska dizertačná práca skúma, ako štruktúra vákua v kvantovej chromodynamike vplyva na vlastnosti veľmi ťažkých kvarkónií, a niektoré súvisiace problémy. Pri písaní práce som sledoval dva ciele: jednak predložiť a zhrnúť výsledky vlastného výskumu, jednak podať do istej miery celistvý obraz problematiky. Preto som do práce zahrnul aj niekoľko kapitol, ktoré bezprostredne neobsahujú výsledky mojej vlastnej práce. Na záver práce som zaradil kvôli úplnosti niekoľko dodatkov, obsahujúcich väčšinou technické detaily výpočtov.

Obsah práce je nasledujúci:

Hlava I. podáva prehľad o súčasnom stave problematiky, ktorá je predmetom dizertácie. Po úvode sú do nej zaradené dve prehľadové kapitoly. Najprv (kap. 2) podávam kvalitatívny obraz predstáv o štruktúre vákua v kvantovej chromodynamike a zároveň zhrňam informáciu o našej znalosti parametrov vákua v QCD.

Ďalšia kapitola (kap. 3) obsahuje veľmi stručný prehľad fyziky existujúcich ťažkých kvarkónií. Po prehľade základných experimentálnych údajov o skupinách  $\psi$ - a  $\Upsilon$ -častíc sa venujem jednému z najúspešnejších fenomenologic-

kých prístupov k popisu kvarkónií - potenciálovým modelom. (Iné prístupy - "vrecový" model, strunový model a iné - ponechávam bokom kvôli objemu práce; prehľad možno nájsť napr. v [34].) Potenciálové modely si vyžadujú znalosť potenciálu  $Q\bar{Q}$  interakcie. Zo základných princípov QCD sa ho nepodarilo dosiaľ odvodiť. V závere odstavca 2.3 je súhrn niekoľkých informácií o statickom medzikvarkovom potenciáli z mriežkovej formulácie QCD a jej simulácie metódou Monte Carlo. Zdôrazňuje sa aj úloha topónia pri určení krátkodosahovej časti potenciálu.

Prehľadový charakter má aj 6. kapitola, ktorá je súčasťou V. hlavy.

Hlava II. formuluje hlavné ciele dizertačnej práce.

V III. hlave sa už zaoberám vytýčenými cieľmi práce. Najprv však v 4. kapitole popisujem výpočet vplyvu gluónového kondenzátu na ťažké kvarkóniá zhruba tak, ako ho uskutočnili Vološin a Leutwyler vo svojich priekopníckych článkoch [32] a [33]. Sú v nej sformulované základné fyzikálne predpoklady, fyzikálny obraz interakcie kvarkov "ponorených" v gluónovom prostredí, ktorý je zároveň základom prístupov, rozvíjaných v ďalších kapitolách. Na záver uvádzam niekoľko poznámok o neadekvátnosti potenciálového prístupu pri popise vplyvu gluónového kondenzátu.

Leutwylerov a Vološinov (LV) výsledok je znovu odvodený iným spôsobom v piatej kapitole. Tá však najprv popisuje všeobecnejšiu metódu výpočtu vplyvu štruktúry vákua na vlastnosti ťažkých kvarkónií. V jej rámci sa LV prístup reprodukuje veľmi prirodzeným spôsobom. Realistickejší výpočet pomocou navrhovanej metódy si vyžaduje podrobnejšiu informáciu o vákuu QCD, ktorú dnes nemáme k dispozícii. Relevantnosť vyšších korekcií odhadujem na jednoduchom modeli, ktorého autorom je K. Zalewski [35].

Výsledky, získané metódou z III. hlavy, spoločne s jej problémami a vnútornými obmedzeniami, zhrňa IV. hlava.

V ďalšej hlave sa na výpočet chromodynamického Starkovho javu v topóniu využívajú súčtové vzťahy. Šiesta kapitola zhrňa základné myšlienky a úspechy súčtových vzťahov v QCD [27]. V siedmej kapitole sa táto metóda aplikuje na topónium. Preň sa očakáva, že nerelativistický prístup je veľmi dobrým priblížením; súčtové vzťahy vtedy úzko súvisia s nerelativistickou Greenovou funkciou kvarkónia. Keďže však vyššie členy poruchového rozvoja pre Greenovu funkciu v prípade coulombovského potenciálu klesajú pomaly, je potrebné zarátať ich príspevok do súčtových vzťahov. Podrobný výpočet coulombovských korekcií obsahuje začiatok kapitoly (a dodatky). Zvyšok obsahuje výsledky. Ukázalo sa, že tzv. momentové súčtové vzťahy poskytujú hodnoty, ktoré sa podstatne (najmenej o rád) líšia od výsledkov Leutwylera a Vološina, získaných bez použitia súčtových vzťahov.

Príčiny odchýliek odhaľujem v ôsmej kapitole, kde sa vyšetrujú kvantovomechanické súčtové vzťahy (analogické tým, čo sa používajú v QCD) v dvoch jednoduchých situáciách - pre jednorozmerný harmonický oscilátor vo vonkajšom elektrickom poli a pre Starkov jav v atóme vodíka. V druhom prípade, ktorý je blízky situácii v topóniu, je potrebné jednak zahrnúť coulombovské korekcie, a jednak starostlivo zvážiť v súčtových vzťahoch vplyv vyšších viazaných stavov a kontínua.

Záverečná časť (hlava VI.) zhrňa hlavné výsledky práce a poučenia, ktoré vyplývajú z uskutočnenej analýzy.

Ešte niekoľko slov k používaným jednotkám a symbolike: Ako je zvykom vo fyzike elementárnych častíc používam prirodzenú sústavu jednotiek, v ktorej je Planckova konštanta  $\hbar$  a rýchlosť svetla vo vákuu  $c$  jednotková. Cez dvakrát opakované indexy vo vzorcoch sa sčítuje; znak sčítania vypíšem len tam, kde by mohlo dôjsť k nedorozumeniu. Lorentzovské indexy označujem malými gréckymi písmenami  $\mu, \nu, \dots$ , priestorové indexy malými písmenami latinky zo stredu abecedy ( $i, j, \dots$ ). Na označenie farieb kvarkov sa používajú

veľké písmená zo začiatku abecedy, malé písmená na označenie farebných indexov kalibračných polí. Ďalej:  
 $a^\mu = (a^0, \vec{a})$ ,  $a_\mu = (a^0, -\vec{a})$ ,  $\partial^\mu \varphi \equiv \partial \varphi / \partial x_\mu = (\partial \varphi / \partial t, -\vec{\nabla} \varphi)$ ,  
 $\partial_\mu \varphi \equiv \partial \varphi / \partial x^\mu = (\partial \varphi / \partial t, +\vec{\nabla} \varphi)$ ;  $ab \equiv a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$ , atď.  
 Ďalšie označenia sú zrejmé alebo vyplývajú z textu.

Vzťahy sa v rámci každej kapitoly čísloujú samostatne. Na vzťah, uvedený v niektorej kapitole, sa v tej istej kapitole odvolávam len číslom; v inej kapitole pridávam číslo kapitoly, v ktorej bol vzťah po prvýkrát uvedený. Napríklad, (6) označuje 6. vzťah danej kapitoly, (3.7) je 7. vzťah 3. kapitoly, a pod. Rovnakým spôsobom sa označujú tabuľky a obrázky.

## 1.2. Základné informácie o kvantovej chromodynamike

Za základné stavebné kamene hadrónov sa považujú kvarky a gluóny. Kvarky majú spin  $1/2$  a neceločíselný elektrický náboj (v jednotkách náboja protónu) i baryónové číslo. Existuje prinajmenšom päť druhov kvarkov, ktoré sa označujú písmenami u (up), d (down), s (strange), c (charm) a b (bottom alebo beauty).<sup>1)</sup> Kvantové čísla a odhadované prúdové hmotnosti kvarkov sú zhrnuté v Tabuľke 1. Každý druh kvarkov sa pritom vyskytuje v troch farbách.<sup>2)</sup> Kvarkové polia budem označovať  $\psi_A^{(i)}(x)$ , pričom index  $i$  označuje typ kvarku ( $i = u, d, s, c, b, \dots$ ), index  $A$  označuje farbu ( $A = 1, 2, 3$ ). V mnohých vzťahoch však tieto indexy nebudem explicitne vypisovať (podobne ako spinorové indexy).

<sup>1)</sup> Očakávaný kvark typu t (top alebo truth) sa doposiaľ nepodarilo objaviť, i keď existujú nepriame experimentálne náznaky z vysokoenergetických p̄p zrážok v CERNe [36, 37].

<sup>2)</sup> Experimentálna evidencia pre práve tri farby je veľmi presvedčivá. Napr. z rozpadu  $\pi^0$ -mezónu na dva fotóny vyplýva počet farieb  $N_c = (3,06 \pm 0,10)$  [21].



Tabuľka 1. Vlastnosti kvarkov

Typ kvarku	u	d	s	c	b	t (?)
Odhadovaná hmotnosť v MeV [34]	5	9	182	1200	4400	>22500
Baryónové číslo	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3
Elektrický náboj	2/3	-1/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3
Izospin	1/2	-1/2	0	0	0	0
Podivnosť	0	0	-1	0	0	0
Šarm	0	0	0	1	0	0
Botomovosť	0	0	0	0	-1	0
Topovosť	0	0	0	0	0	1

Sprostredkovateľmi farebných interakcií sú gluóny. Počet gluónových polí sa rovná počtu generátorov grupy symetrie  $SU(3)_c$ ; je ich teda osem. Gluónové polia budem označovať  $A_\mu^a(x)$ , pričom  $a$  je farebný index ( $a = 1, 2, \dots, 8$ ),  $\mu$  je lorentzovský index ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ).

Ústredným objektom, ktorý definuje kvantovú teóriu poľa [38], je lagranžovská hustota (alebo stručne lagranžián). Všeobecný postup pri konštrukcii lagranžiánu pre kalibračnú teóriu s ľubovoľnou grupou symetrie je dávno známy [39]. Pre farebnú grupu  $SU(3)_c$  je výsledkom lagranžián

$$L_{\text{QCD}} = L_{\text{gluon}} + L_{\text{kvark}} + L_{\text{int}} \quad (1)$$

kde  $L_{\text{gluon}}$  je lagranžián voľného kalibračného poľa

$$L_{\text{gluon}} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}, \quad (2)$$

$L_{\text{kvarok}}$  je lagranžian volných kvarokov

$$L_{\text{kvarok}} = \sum_{\text{typy}} \bar{\psi}^{(i)} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m_i) \psi^{(i)} \quad (3)$$

a  $L_{\text{int}}$  je lagranžian interakcie kvarokov a gluónov

$$L_{\text{int}} = g \sum_{\text{typy}} \bar{\psi}^{(i)} \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a \psi^{(i)} \quad (4)$$

Vo vzťahoch (2) - (4) nevypisujem indexy farieb kvarokov.  $G_{\mu\nu}^a$  je tenzor kalibračného poľa

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (5)$$

$f^{abc}$  sú štruktúrne konštanty grupy SU(3),  $m_i$  je hmotnosť  $i$ -teho typu kvarku,  $g$  je väzbová konštantá,  $\gamma^\mu$  a  $\lambda^a$  sú štandardné Diracove resp. Gell-Mannove matice.

Lagranžian QCD je invariantný voči lokálnym kalibračným transformáciám typu

$$\psi^{(i)}(x) \rightarrow \psi'^{(i)}(x) = S(x) \psi^{(i)}(x), \quad (6a)$$

$$\frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a(x) \rightarrow \frac{\lambda^a}{2} A'^a_\mu(x) = S(x) \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a(x) S^{-1}(x) - \frac{i}{g} [\partial_\mu S(x)] S(x), \quad (6b)$$

pričom  $S(x)$  je unitárna matica s jednotkovým determinantom.

Lagranžian (1) v dôsledku kalibračnej invariantnosti neurčuje kvantovú teóriu jednoznačným spôsobom. Podobne ako v QED v ňom vystupujú nefyzikálne stupne voľnosti, ktorých sa možno zbaviť pri výpočtoch buď vylúčením nadbytočných stupňov voľnosti pomocou tzv. kalibračnej podmienky, alebo pridaním do (1) členov, ktoré nie sú invariantné voči transformáciám (6), fixujú kalibráciu a zároveň zabezpečujú unitárnosť teórie. Týmto sa však podrobnejšie nebudem zaoberať (pozri napr. kap. 12 v učebnici [38]).

Púhy pohľad na lagranžian kvantovej chromodynamiky prezrádza mnohé dôležité skutočnosti:

1. Poliam  $A_\mu^a$  zodpovedajú kvantá (gluóny) so spinom 1 a nulovou hmotnosťou. Do  $L_{\text{QCD}}$  nie je možné pridať hmotnostný člen pre kalibračné polia (typu  $A_\mu^a A^{\mu b} A^{\mu c}$ ), ktorý narušuje kalibračnú invariantnosť.

2. Interakcia kvarkov s gluónmi je príbuzná interakcii elektrónov s fotónmi v QED. Stačí zameniť  $e/\hbar c$  z QED na  $g\gamma^a \lambda^a/2$ .

3. Novou črtou QCD je vzájomná interakcia medzi gluónmi. Gluóny - na rozdiel od fotónov - sami nesú náboj. Ak z teórie vynecháme kvarky, ostane nám lagranžian  $L_{\text{gluon}}$ , ktorý nie je triviálny; obsahuje členy úmerné  $f^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) A^{b\mu} A^{c\nu}$  a  $f^{abc}f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu}$ , ktoré popisujú vzájomné pôsobenie medzi gluónmi. Preto sa QCD bez kvarkov stala častým predmetom štúdia ako prvé priblíženie k reálnej QCD.

Vzájomná interakcia medzi gluónmi má pre chromodynamiku ďalekosiahle dôsledky. Zapríčiňuje aj už spomínanú asymptotickú voľnosť QCD. Väzbová konštanta v QCD závisí od charakteristickej škály hybností  $q$  v študovanom procese podľa vzťahu [11, 12]<sup>1)</sup>

$$\alpha_s(q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \frac{33 - 2n_f}{12\pi} \alpha_s(\mu^2) \ln \frac{q^2}{\mu^2}}, \quad (7)$$

kde  $\alpha_s = g^2/4\pi$ ,  $\mu^2$  je normalizačný bod a  $n_f$  je počet typov kvarkov, ktorých hmotnosť je  $\leq q^2$ . Vzťah (7) prezrádza, že väzbová konštanta klesá s rastom  $q^2$  (s poklesom charakteristických vzdialeností) a rastie s poklesom  $q^2$  (s rastom vzdialeností).

<sup>1)</sup> Presný vzťah pre  $\alpha_s$  nie je známy; (7) je výsledkom sčítania tzv. vedúcich logaritmickej členov v poruchovom rozvoji (angl. leading log approximation).

Interakcie medzi gluónmi sa považujú za príčinu zložitej štruktúry vákua a jeho excitácií v QCD, ktorej dôsledkom by malo byť uväznenie farby. Náznakom je rast  $\alpha_s(q^2)$  pri malých  $q^2$  [viď (7)], ďalšie závery však nemožno na základe vzťahu (7) urobiť: pre  $\alpha_s = O(1)$  stráca tento poruchový výsledok platnosť.

## Kapitola 2. PROBLÉM ŠTRUKTÚRY VÁKUA V QCD

Nájsť štruktúru vákua v kvantovej chromodynamike a dokázať hypotézu o uväznení farby je problém nanajvýš zložitý, ktorý sa dosiaľ nepodarilo rozriešiť. Prehľad rozličných prístupov a ich čiastkových úspechov možno napríklad nájsť v článkoch [24, 25, 40]. V tejto časti sa nepokúsim o zhodnotenie jednotlivých prístupov; naopak, sústredím sa na jednoduchý model [41], ktorý, hoci má ďaleko k úplnej reálnej QCD, umožňuje získať istú kvalitatívnu predstavu o vlastnostiach chromodynamického vákua.

### 2.1. Kvalitatívne vlastnosti kvantovej chromodynamiky v rovine<sup>1)</sup>

Mnohí autori študujú čo najjednoduchšie modely, o ktorých možno predpokladať, že majú (aspoň kvalitatívne) podobné vlastnosti ako QCD. Jedným príkladom je kvantová chromodynamika s dvoma farbami bez prítomnosti kvarkov. Takéto zjednodušenie podstatne redukuje zložitosť problému, hoci sa tu uväznenie farby zužuje na uväznenie gluónov a problém vzniku ich viazaných stavov (gluónií alebo glueballov).<sup>2)</sup>

---

<sup>1)</sup> V tomto odstavci zhrniem základné myšlienky článkov [41], ako boli zjednodušene podané v mojich prácach [42, 43].

<sup>2)</sup> Ich existencia je dôležitou predpoveďou QCD. Bolo objavených niekoľko rezonancií, ktoré by mohli byť glueballmi, ich existencia však nebola presvedčivo dokázaná, lebo

Zaujímavý pokus nájsť vlnový funkcionál základného stavu dvojfarebnej QCD bez kvarkov uskutočnil Greensite [48]. Využil v ňom ako vodičko pri výbere približného funkcionálu základného stavu v chromodynamike znalosť presného vlnového funkcionálu základného stavu v elektrodynamike. Spolahli-  
vosť jeho aproximácie sa dá len ťažko odhadnúť, a navyše matematické ťažkosti robia problematickým akékoľvek praktické použitie jeho výsledku.

Feynman [41] uskutočnil ďalšie zjednodušenie: prechod z trojrozmerného priestoru do roviny. Dosiahol tým podstatnú redukciu počtu stupňov voľnosti v systéme. Navyše je QCD v rovine superrenormalizovateľnou teóriou, v ktorej sa nevyskytujú ultrafialové divergencie ako v QED alebo QCD v reálnom časopriestore. Táto vlastnosť úzko súvisí s tým, že väzbová konštanta  $g$  v rovinatej QCD nie je bezrozmerná, ale má fyzikálny rozmer druhej odmocniny z hmotnosti. Teória tak obsahuje prirodzenú škálu dĺžok  $\Lambda \equiv 1/g^2$ .

Feynman kvalitatívne dokazuje dve dôležité vlastnosti chromodynamiky v rovine:

- a) najnižšie excitácie (gluebally, gluóniá) majú nenulovú hmotnosť;
- b) ak do vákua vložíme ťažký kvark a antikvark, potom energia sústavy rastie s ich vzdialenosťou: kvarky sú uväznené.

Podstata dôkazu spočíva v skutočnosti, že neabelovská teória napriek formálnej podobnosti s abelovskou teóriou má vďaka nelineárnym samointerakčným členom kalibračných polí úplne odlišný charakter fluktuácií poľa ako abelovská teória.

Kvôli zjednodušeniu argumentácie je vhodné používať časovú kalibráciu, definovanú kalibračnou podmienkou

$$A_0^a(x) = 0 \quad (1)$$

---

je ťažké odlíšiť glueball od obyčajnej mezónovej rezonancie [44 - 47].

Na popis poľa budeme potom v rovine používať potenciály  $A_r^a(r, \theta)$ ,  $A_\theta^a(r, \theta)$  (v polárnych súradniciach)<sup>1)</sup>. Výhodné bude používať maticový zápis, napr.

$$\underline{A}_r \equiv \frac{1}{2} \sigma^a A_r^a, \text{ a pod.} \quad (2)$$

V Schrödingerovej reprezentácii každej konfigurácii poľa (voľbe potenciálov  $A$ ) prislúcha istá amplitúda,  $\psi[A]$ . Stav sústavy teda popisuje vlnový funkcionál  $\psi[A]$ . Vlnový funkcionál konečnej konfigurácie  $A_F$  v čase  $T$  je vo Feynmanovom formalizme dráhových integrálov [49] daný výrazom (píšem ho len symbolicky)

$$\psi_T[A_F] = \int [dA][dA_I] e^{iS[A]} \psi_{\text{START}}[A_I], \quad (3)$$

pričom sa v ňom sčítuje (integruje) cez všetky možné konfigurácie  $A$ , ktoré začínajú počiatočnou konfiguráciou  $A_I$  a končia v čase  $T$  konfiguráciou  $A_F$ , a cez všetky možné  $A_I$ . Amplitúdy počiatočných konfigurácií sú  $\psi_{\text{START}}[A_I]$ ,  $S[A]$  v exponente označuje účinok.

Vhodný pre ďalšiu argumentáciu je aj prechod do euklidovského časopriestoru (zámenou  $t \rightarrow -it$ ), čím dostaneme

$$\psi_T[A_F] = \int [dA][dA_I] e^{-S[A]} \psi_{\text{START}}[A_I], \quad (4)$$

kde  $S[A]$  je teraz euklidovský účinok, čo je vlastne energia konfigurácie  $A$ <sup>2)</sup>. Prechodom do euklidovského priestoru sa periodické funkcie času stanú exponenciálne klesajúcimi funkciami (euklidovského) času a v dráhovom integráli

<sup>1)</sup> V ďalšom uvažujeme dvojfarebnú chromodynamiku; index  $a$  nadobúda hodnoty 1, 2, 3; úlohu Gell-Mannových matíc  $\lambda^a$  [pozri (1.4)] hrajú Pauliho matice  $\sigma^a$ , úlohu  $f^{abc}$  hrá Levi-Civitov tenzor  $\epsilon^{abc}$ .

<sup>2)</sup> Spätný prechod do Minkowského priestoru sa dosiahne analytickým predĺžením výsledkov, získaných pomocou (4).

sa objaví exponenciálny faktor  $\exp(-\text{energia konfigurácie})$ , ktorý potláča konfigurácie s veľkou energiou.

Prejdem teraz k argumentom o gluóniu.

Gluónium je viazaný stav gluónov v bezfarebnom (singletnom) stave. Feynman ukazuje, že spektrum excitácií v QCD v rovine začína od určitej konečnej a nenulovej hmotnosti, a nie od nuly ako v elektrodynamike.

Schéma argumentu je nasledovná: Energia určitej excitácie je v elektrodynamike nepriamo úmerná vlnovej dĺžke  $L$ , ktorá je prielúča. Excitácii s nulovou energiou zodpovedá fotón s  $L \rightarrow \infty$ . To však zároveň znamená, že existujú korelácie medzi správaním sa poľa vo (veľmi) vzdialených oblastiach. Kvalitatívny dôkaz nenulovosti energie najnižšej excitácie v rovinatej QCD sa preto zakladá na tom, že tu sú niektoré fluktuácie kalibračného poľa nezávislé od toho, čo sa deje v dostatočne vzdialených oblastiach priestoru.

Aby som ukázal odlišnosť fluktuácií v elektrodynamike a chromodynamike, uvediem jednoduchý argument. Predstavme si fluktuáciu elektromagnetického poľa v nejakej oblasti - vyberiem pre jednoduchosť kruh s polomerom  $a$ . Nech sa potenciál mení od počiatočnej "nulovej" konfigurácie ( $A_r = A_\theta \equiv 0$ ) po konfiguráciu, ktorej zodpovedá magnetické pole  $B$ , ktoré je nenulové len vo vnútri kruhu, napr.

$$B = \begin{cases} \phi / \pi a^2 & \text{pre } r \leq a, \\ 0 & \text{pre } r > a, \end{cases} \quad (5)$$

pričom som ako  $\phi$  označil magnetický tok cez plochu kruhu. Potenciál fluktuácie môžeme zvoliť v tvare

$$\begin{aligned} A_r^{\text{fluct}}(t, r, \theta) &= f(t) A_r(r, \theta), \\ A_\theta^{\text{fluct}}(t, r, \theta) &= f(t) A_\theta(r, \theta), \end{aligned} \quad (6)$$

kde  $f(t)$  rastie od nuly po jednotku a  $A_r, A_\theta$  sú potenciály,

ktorým zodpovedá magnetické pole  $B$  vo vzťahu (5). Možný výber je

$$A_r \equiv 0 ; \quad A_\theta = \begin{cases} \phi r / 2\pi a^2 & \text{pre } r \leq a \\ \phi / 2\pi r & \text{pre } r > a. \end{cases} \quad (7)$$

Takáto fluktuácia je nepravdepodobná, lebo s ňou spojené elektrické pole je

$$E_r \equiv 0 ; \quad E_\theta = -\dot{f} A_\theta \quad (8)$$

a jeho energia je nekonečná

$$\frac{1}{2} \int d^3x \epsilon_0^2 = (\phi^2 \dot{f}^2 / 4\pi) \int_a^\infty \frac{dr}{r} + \text{konšt.} \quad (9)$$

Ako vidno zo vzťahu (4), fluktuácie s veľmi veľkou (nekonečnou) energiou majú zanedbateľnú pravdepodobnosť (zanedbateľný príspevok do dráhového integrálu). Zdá sa teda, že podobnú lokálnu fluktuáciu nie je možné vytvoriť.

Jedinú únikovú cestu v poslednej úvahe by mohla poskytnúť kalibračná invariantnosť. Nedajú sa  $A_r$ ,  $A_\theta$  transformovať tak, aby boli nenulové len vnútri kruhu s polomerom  $a$ ? Odpoveď je záporná vďaka vzťahu medzi  $B$  a  $A$  ( $B = \text{rot } \vec{A}$ ), z ktorého pomocou Stokesovej vety vyplýva

$$\phi = \int_S B \, dS = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}, \quad (10)$$

kde plocha  $S$  obsahuje uvažovaný kruh a krivka  $C$  ohraničuje plochu  $S$ . Zo vzťahu (10) vidno, že vektorový potenciál nemôže byť nulový všade mimo kruhu.<sup>1)</sup>

V chromodynamike je situácia iná, lebo vzťah medzi chromomagnetickým poľom  $B^a$  a potenciálom  $\vec{A}^a$  je zložitejší a okrem rotácie vektora  $\vec{A}^a$  obsahuje nelineárny člen úmerný

---

<sup>1)</sup> Ak by sme dovolili, aby mal potenciál singularitu vo vnútri kruhu, potom by sme to mohli dosiahnuť; narazili by sme však na analogické problémy s nekonečnou energiou singularnej konfigurácie.



$\epsilon^{abc} \vec{A}^b \times \vec{A}^c$ , takže nevznikajú problémy so Stokesovou vetou. Opäť si môžeme predstaviť pole v kruhu s polomerom  $a$ , napr.

$$\underline{B} = \frac{1}{2} \sigma^3 B, \quad (11)$$

ktoré sa dá získať z potenciálov

$$\underline{A}_r \equiv 0, \quad \underline{A}_\theta \equiv \frac{1}{2} \sigma^3 A_\theta, \quad (12)$$

pričom  $B$  a  $A_\theta$  udávajú vzťahy (5) a (7). Znovu sa vynára otázka, či možno potenciál mimo kruhu vynulovať vhodnou kalibračnou transformáciou.

Odpoveď je teraz v niektorých špeciálnych prípadoch kladná. Požadovaná kalibračná transformácia sa dá nájsť, ak je potenciál (12) kalibračne ekvivalentný mimo kruhu nenulovému potenciálu. Zaveďme kalibračne nezávislú veličinu

$$R(2\pi) = \text{sp} \exp \left\{ -ig \oint_C [\underline{A}_r(r, \theta) dr + \underline{A}_\theta(r, \theta) r d\theta] \right\} \quad (13)$$

kde sa integruje okolo fluktuácie po kruhu  $C$  s polomerom  $r \geq a$  <sup>1)</sup> Pre  $\underline{A}_r, \underline{A}_\theta$  dané vzťahmi (7) a (10) výjde

$$R(2\pi) = \text{sp} \exp \left( -i \frac{1}{2} g \phi \sigma^3 \right), \quad (14)$$

takže ak  $\phi = 4\pi n/g$  ( $n$  je celé číslo) <sup>2)</sup> tak  $R(2\pi)$  je rovnaké ako pre nulovú konfiguráciu [ $R(2\pi) = \text{sp} 1$ ].

Potenciály  $4\pi/g$ -fluktuácie sa dajú odstrániť mimo kruhu s polomerom  $a$  pomocou kalibračnej transformácie typu (1.6), ak zvolíme maticu  $S$

$$S(r, \theta) = \exp [i\pi h(r) (\sigma^1 \sin \theta - \sigma^2 \cos \theta)/2], \quad (15)$$

<sup>1)</sup>  $R(2\pi)$  je špeciálnym prípadom Wilsonovej slučky, o ktorej sa zmienim neskôr (v 3. kapitole).

<sup>2)</sup> V najjednoduchšom prípade ( $n = 1$ ) budem hovoriť o  $4\pi/g$ -fluktuácii.

pričom  $h(r)$  je nejaká (spojitá) funkcia, pre ktorú  $h(0) = 0$  a  $h(r) = 1$  pri  $r > a$ .  $4\pi/g$ -fluktuácia sa môže vyvinúť v kruhu s polomerom  $a$  bez toho, aby k tomu bola potrebná nekonečná energia.

V uvedenom spočíva podstatná odlišnosť fluktuácií v chromodynamike od situácie v elektrodynamike. V rovinatej chromodynamike možno vytvoriť  $4\pi/g$ -fluktuáciu bez toho, aby sme podstatne ovplyvnili iné oblasti priestoru. Charakteristický polomer oblasti fluktuácie musí z rozmerových dôvodov byť rádu  $\Lambda$  a energia excitácie (gluónia) rádu  $\Lambda^{-1} = g^2$ .

Podrobnou analýzou fluktuácií vo vákuu možno ďalej v rovinatej chromodynamike dokázať uväznenie kvarkov. Podstatnými sa pri ňom stávajú fluktuácie s chromomagnetickým tokom  $2\pi/g$ . Týmto argumentami sa tu nebudem zaoberať; podrobnosti možno nájsť v pôvodnom článku Feynmana [41] alebo v jeho polopopulárnej transkripcii v [42, 43].

Neexistuje žiaden presvedčivý dôkaz toho, že kvalitatívne črty QCD v rovine priamo alebo nepriamo odrážajú vlastnosti chromodynamiky v priestore s tromi priestorovými a jedným časovým rozmerom a s tromi farbami. Problémy komplikujú mnohé prekážky:

- a) veľký počet premenných, od ktorých závisí vlnový funkcionál;
- b) do hry vstupuje procedúra renormalizácie, lebo reálna QCD je síce renormalizovateľnou, ale nie superrenormalizovateľnou teóriou;
- c) podstatne bohatšia je množina riešení nelineárnych rovníc kalibračného poľa; atď.

Napriek týmto problémom sú Feynmanove výsledky náznačkom pokroku v kvalitatívnom chápaní QCD. Jeho jednoduchý model ilustruje to, čo sa očakáva i v reálnej QCD: že vákuum QCD je zložitým kondenzátom (relatívne) nezávislých fluktuácií kalibračných polí, ktorého vlastnosti sa podstatne líšia od "poruchového" vákua ako prázdneho priesto-

ru bez polí. Podobná predstava je zabudovaná aj v iných modeloch vákuua QCD (viď napr. [15, 50 - 52]).

## 2.2. Parametre vákuua

Očakávame, že vákuum je v kvantovej chromodynamike zložitým prostredím plným fluktuujujúcich kvarkových a gluónových polí. Jeho detailná štruktúra však nie je známa. Ako z minima informácií o vákuu vyťažiť maximum informácií o vlastnostiach hadrónov, ktoré sa pozorujú v experimentoch? Neočakávane priama odpoveď na túto zdanlivo takmer nemiešiteľnú otázku bola objavená skupinou fyzikov v ITEP [27]. Navrhujú parametrizovať informácie o vákuu QCD pomocou niekoľkých fenomenologických parametrov, vákuových stredných hodnôt rôznych kombinácií kvarkových a gluónových polí. Pri ich konštrukcii sa využívajú len najzákladnejšie plauzibilné predpoklady o vákuu: jeho lorentzovská invariantnosť, bezfarebnosť a nezávislosť fyzikálnych predpovedí od spôsobu renormalizácie. Najjednoduchšie kombinácie, ktoré rešpektujú uvedené predpoklady, sú: kvarkový kondenzát  $\langle 0 | m_i \bar{\psi}^{(i)}(x) \psi^{(i)}(x) | 0 \rangle$  (pripomínam, že index  $i$  označuje typ kvarku) a gluónový kondenzát  $G^2 \equiv \langle 0 | (\alpha_s/\pi) G_{\mu\nu}^a(x) G^{a\mu\nu}(x) | 0 \rangle$ , ktorých fyzikálny rozmer je (hmotnosť)<sup>4</sup>, a ďalšie kondenzáty s vyššími rozmermi (napr.  $\langle 0 | g f^{abc} G_{\mu\nu}^a G_{\sigma\tau}^b G^{c\sigma\tau} | 0 \rangle$ , atď.).

Informácie o hodnotách týchto parametrov, ktoré sú v súčasnosti k dispozícii, sú značne kusé. Kvarkový kondenzát bol v skutočnosti zavedený dávno pred vznikom QCD, v kontexte tzv. algebry prúdov [53]. Odhadovaná hodnota je

$$\langle 0 | m_i \bar{\psi}^{(i)} \psi^{(i)} | 0 \rangle \approx -(100 \text{ MeV})^4, \quad i = u, d \quad (16)$$

Vplyv tohto kondenzátu na fyziku veľmi ťažkých kvarkónií je však zanedbateľný.

Znalosť parametrov gluónového kondenzátu pochádza prevažne z dvoch zdrojov:

a) z chromodynamických súčtových vzťahov, ktoré navrhol Šifman, Vajnshtejn a Zacharov (ŠVZ) [27];

b) z numerických výpočtov predpovedí QCD v mriežkovej formulácii metódou Monte Carlo.

Súčtovým vzťahom sa budem ešte venovať v 6. kapitole; preto teraz len uvediem, že analýza ŠVZ priviedla k hodnote

$$G^2 \approx 0,012 \text{ GeV}^4 \quad (17)$$

Neskoršie bola táto hodnota častokrát označovaná za dolný odhad či dokonca podhodnotenie skutočného gluónového kondenzátu (k tejto skutočnosti sa ešte vrátim neskôr).

O hodnotách vyšších kondenzátov sa vie len málo, napr.

$$G_3 \equiv \langle 0 | g f^{abc} G_{\mu\nu}^a G_{\nu\rho}^b G_{\rho\mu}^c | 0 \rangle < 0. \quad (18)$$

Mriežková formulácia QCD umožňuje priamy výpočet gluónového kondenzátu. Zatiaľ však nie je jasné, akú váhu možno prikladať mriežkovým výsledkom. Jednak sú potrebné isté aproximácie (zanedbáva sa napr. vplyv kvarkov), jednak dôležitú úlohu stále hrajú efekty konečnosti mriežky, a konečne neexistuje dôkaz, že hodnoty, získané na mriežke, nutne konvergujú k správnym hodnotám pre QCD v spojitom priestore. Výsledky, ktoré sa doposiaľ získali výpočtami na mriežke, sú však v prekvapujúcom súhlase s fenomenologickými hodnotami (17) a (18). Nedávny prehľad [54] napr. uvádza

$$G_2 \approx 0,015 \text{ GeV}^4 \quad (19)$$

a

$$G_3/G_2^{3/2} = -(1,72 \pm 0,06)^6. \quad (20)$$

Prejdeme teraz k fyzike ťažkých kvarkov, keďže práve viazané stavy ťažkých kvarkov a antikvarkov umožňujú študovať neporuchové chromodynamické efekty v relatívne veľmi jednoduchej situácii.

### Kapitola 3. ŤAŽKÉ KVARKÓNIA

Objav viazaných stavov ťažkých kvarkov a antikvarkov nového typu sa stal jedným z dôležitých stimulov prudkého rozvoja, ktorý zaznamenáva v ostatných rokoch fyzika vysokých energií. Hlavné príčiny tejto skutočnosti som rozviedol už v úvode: ťažké kvarkónia sú ideálnym laboratóriom pre testy teórií fundamentálnych interakcií, lebo sú v podstate coulombovskými a nerelativistickými systémami.<sup>1)</sup>

#### 3.1. Prehľad experimentálnych údajov o šarmóniu a boto-móniu

Prvou časticou z rodiny ťažkých kvarkónií bola úzka rezonancia  $J/\psi$ , ktorej objav bol ohlásený v novembri 1974 súčasne experimentálnymi skupinami v Brookhavene [28] a v Stanforde [29], a zakrátko potvrdený skupinou v laboratóriu Frascati [69]. Onedlho bola objavená aj ďalšia rezonancia podobného typu, ktorá dostala názov  $\psi'$  [70]. Z mnohých vysvetlení týchto úzkych stavov sa správnym ukázalo vysvetlenie Appelquista a Politzera [71], ktorí predpokladali, že  $J/\psi$  a  $\psi'$  sú viazanými stavmi kvarku a antikvarku nového typu. Ich malá šírka rozpadu súvisí so zákonom zachovania nového kvantového čísla, ktoré tieto kvarky nesú, tzv. šarmu (pozri Tab. 1.1), v silných interakciách. Appelquistova-Politzerova hypotéza bola potvrdená pozorovanými vlastnosťami  $\psi$ -častíc, ako aj objavom ďalších častíc, ktoré obsahujú c-kvarky.

V súčasnosti skupina  $\psi$ -častíc (šarmónií) obsahuje už jedenásť častíc; existencia väčšiny z nich je presvedčivo dokázaná [72]. Ich energetické spektrum je znázornené na obr. 1, ich hlavné charakteristiky sú zhrnuté v Tab. 1.

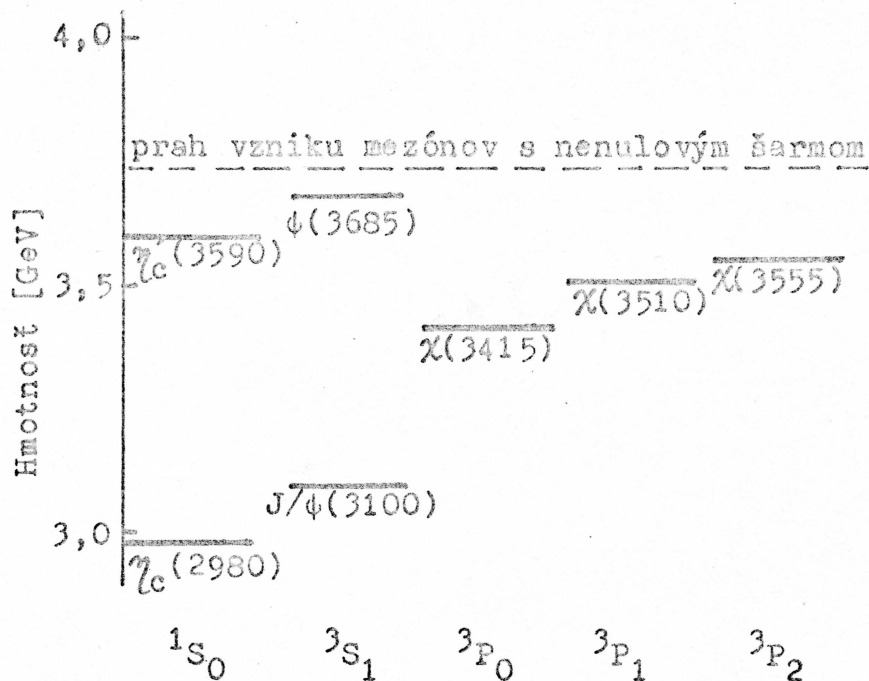
---

<sup>1)</sup> Vyčerpávajúca informácia o najrozličnejších aspektoch fyziky kvarkónií je obsiahnutá v prehľadových článkoch [34, 55 - 68].

Používam spektroskopické označenie

$$n^{2s+1} L_J \quad (1)$$

kde  $n$  je hlavné kvantové číslo,  $J$  celkový moment hybnosti,  $s$  spinový moment hybnosti a  $L$  je orbitálny moment hybnosti ( $L = S, P, D, \dots$ ).



Obrázok 1: Energetické spektrum šarmóniových stavov (pod prahom)

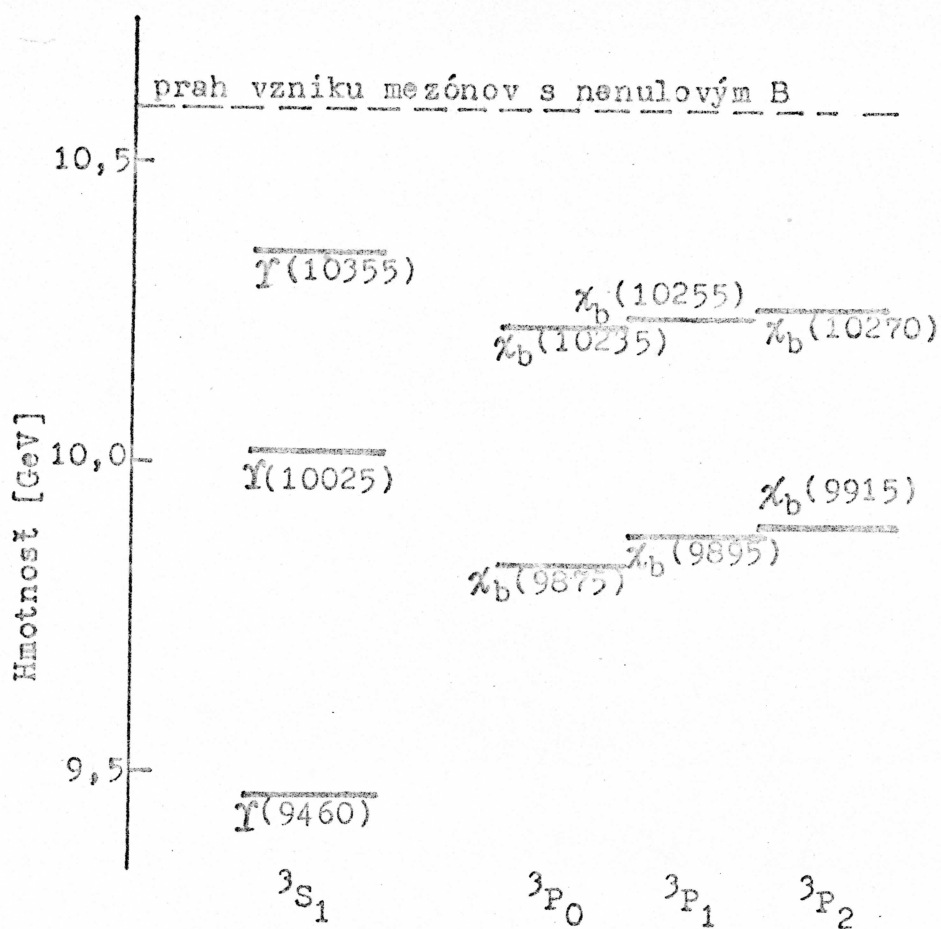
Ďalšia skupina ťažkých kvarkónií bola objavená v roku 1977 [30]. Interpretujú sa ako viazané stavy kvarkov typu  $b$  a príslušných antikvarkov s hmotnosťou  $\sim 4,8$  GeV. Energetické hladiny botomónia zobrazuje obr. 2; ich hlavné vlastnosti zhrňa Tabuľka 2. Experimentálne údaje som prevzal zo [72] a [67].

Tabuľka 1: Základné vlastnosti šarmóniových stavov (podľa [72])

Stav	Spektroskop. označenie	$I^G(J^P)C$	Hmotnosť [MeV]	Šírka rozpadu [MeV]	Četnosť rozpadov na leptóny [%]
$\chi_c$	$1^1S_0$	$0^+(0^-)+$	$2981 \pm 6$	$< 20$	
$J/\psi$	$1^3S_1$	$0^-(1^-)-$	$3069,9 \pm 0,1$	$0,063 \pm 0,009$	$7,4 \pm 1,2$ (e) $7,4 \pm 1,2$ ( $\mu$ )
$\chi(3415)$	$2^3P_0$	$0^+(0^+)+$	$3415,0 \pm 1,0$	gravitačný stred <sup>a</sup> je $M_{\text{cog}} = 3521$ MeV	
$\chi(3510)$	$2^3P_1$	$0^+(1^+)+$	$3510,0 \pm 0,6$		
$\chi(3555)$	$2^3P_2$	$0^+(2^+)+$	$3555,8 \pm 0,6$		
$\chi_c$	$2^1S_0$	$0^+(0^-)+$	$3594 \pm 5$		$< 8$
$\psi(3685)$	$2^3S_1$	$0^-(1^-)-$	$3686,0 \pm 0,1$	$0,215 \pm 0,040$	$0,9 \pm 0,1$ (e) $0,8 \pm 0,2$ ( $\mu$ )
$\psi(3770)$	$3^3D_1$	$(1^-)-$	$3770 \pm 3$	$25 \pm 3$	$0,0011 \pm 0,0002$ (e)
$\psi(4030)$	$3^3S_1^b$	$(1^-)-$	$4030 \pm 5$	$52 \pm 10$	$0,0014 \pm 0,0004$ (e)
$\psi(4160)$	$4^3D_1^b$	$(1^-)-$	$4159 \pm 20$	$78 \pm 20$	$0,0010 \pm 0,0004$ (e)
$\psi(4415)$	$4^3S_1$	$(1^-)-$	$4415 \pm 6$	$43 \pm 20$	$0,0010 \pm 0,0003$ (e)

<sup>a</sup>Definuje sa ako  $M_{\text{cog}} = \frac{1}{9} \sum_{J=0}^2 (2J+1) M(n^3P_J)$ .

<sup>b</sup>Tieto stavy nie sú čisté S resp. D stavy, ale sú značne zmiešané.



Obrázok 2: Energetické spektrum botomóniových stavov (pod prahom)

Kvarky ďalšieho druhu (top, t) neboli zatiaľ objavené; z experimentov so zrážkami elektrónov a pozitronov na zariadení PETRA v DESY je zrejmé, že hmotnosť ich viazaných stavov, topónií, musí byť väčšia ako  $\sim 45 \text{ GeV}/c^2$  [73]. Fyzika topónií teda zostane zrejme zamestnaním pre experimentátorov na plánovaných zariadeniach 90. rokov (napr. LEP v CERNe).

### 3.2. Potenciálové modely ťažkých kvarkónií

Jedným z najjednoduchších a pritom najúspešnejších prístupov k popisu ťažkých kvarkónií sú potenciálové modely (pozri napr. nedávne prehľady [62, 63, 74 a 75 - 77]).



Tabuľka 2: Základné vlastnosti botomóniových stavov (podľa [72])

Stav	Spektroskop. označenie	$I^G(J^P)C$	Hmotnosť [MeV]	Šírka rozpadu [MeV]	Četnosť rozpadov na leptóny [%]
$I(9460)$	$1^3S_1$	$(1^-)-$	$9460,0 \pm 0,3$	$0,0443 \pm 0,0066$	$2,9 \pm 0,5 (\mu)$ $2,5 \pm 0,5 (e)$ $3,4 \pm 0,8 (\tau)$
$\chi_b(9875)$	$2^3P_0$	$(\quad)^+$	$9872,9 \pm 5,8$		
$\chi_b(9895)$	$2^3P_1$	$(\quad)^+$	$9894,5 \pm 3,5$	"gravitačný stred" je $9901 \pm 2$ [67]	
$\chi_b(9915)$	$2^3P_2$	$(\quad)^+$	$9914,6 \pm 2,4$		
$Y(10025)$	$2^3S_1$	$(1^-)-$	$10023,4 \pm 0,3$	$0,0296 \pm 0,0047$	$1,9 \pm 1,8 (\mu)$ $1,6 \pm 0,3 (e)$
$\chi_b(10235)$	$3^3P_0$	$(\quad)^+$	$10232,8 \pm 5,8$		
$\chi_b(10255)$	$3^3P_1$	$(\quad)^+$	$10253,7 \pm 3,4$	"gravitačný stred" je $10256 \pm 5$ [67]	
$\chi_b(10270)$	$3^3P_2$	$(\quad)^+$	$10271,0 \pm 2,4$		
$Y(10355)$	$3^3S_1$	$(1^-)-$	$10355,5 \pm 0,5$	$0,0177 \pm 0,0051$	$2,0 \pm 0,7 (e)$ $3,3 \pm 2,0 (\mu)$
$I(10575)$	$4^3S_1$	$(1^-)-$	$10573 \pm 4$	$14 \pm 5$	$0,0017 \pm 0,0007 (e)$
$I(10865)^a$	$5^3S_1$		$10866 \pm 7 \pm 2$		
$Y(11020)^a$	$6^3S_1(?)$		$11020 \pm 5 \pm 3$		

<sup>a</sup>Uvedené údaje o  $Y(10865)$  a  $Y(11020)$  nie sú obsiahnuté v prehľade [72], pochádzajú z nedávneho Silvermanovho prejavu [67].

V ich rámci sa ťažké kvarkóniá popisujú pomocou nerelativistickej Schrödingerovej rovnice s fenomenologickým medzi-kvarkovým potenciálom.

Základné predpoklady potenciálových modelov sú nasledovné:

1. Ťažké kvarkóniá sa v prvom priblížení dajú popisovať nerelativisticky. Takáto možnosť súvisí s veľkou hmotnosťou konštituentov, a je a posteriori odôvodnená výsledkami potenciálových modelov. Vo väčšine z nich stredná hodnota štvorca rýchlosti konštituentov je  $\beta^2 \approx 0,2$  až  $0,25$  v prípade  $J/\psi$  a  $\beta^2 \approx 0,1$  v prípade  $\Upsilon$ . V šarmóniu možno očakávať nezanedbatelné (nie však dominantné) relativistické korekcie; v botomóniu by mali hrať podstatne menšiu úlohu.

2. Medzikvarkovú interakciu je možné popísať pomocou lokálneho sféricky symetrického potenciálu  $V(r)$  ( $r$  je relatívna vzdialenosť kvarku a antikvarku). Nepochopiteľné chromodynamické efekty vedú k nepotenciálnej interakcii, ktorá môže byť zvlášť dôležitá v prípade topónia; k tejto otázke sa však vrátim až v štvrtej kapitole (odstavec 4.4).

Za týchto predpokladov sa hmotnosti ťažkých kvarkónií nájdú pomocou vzťahu

$$M = 2m_q + E, \quad (2)$$

kde  $E$  je vlastná hodnota energie v Schrödingerovej rovnici

$$\left\{ -\frac{\Delta}{m_q^2} + [V(r) - E] \right\} \psi(\vec{r}) = 0, \quad (3)$$

$\psi(\vec{r})$  je príslušná vlnová funkcia,  $\vec{r}$  je vektor relatívnej polohy kvarku a antikvarku. Vďaka sférickej symetrii potenciálu

$$\psi(\vec{r}) = R(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \equiv \frac{u(r)}{r} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (4)$$

a postačí riešiť radiálnu Schrödingerovu rovnicu

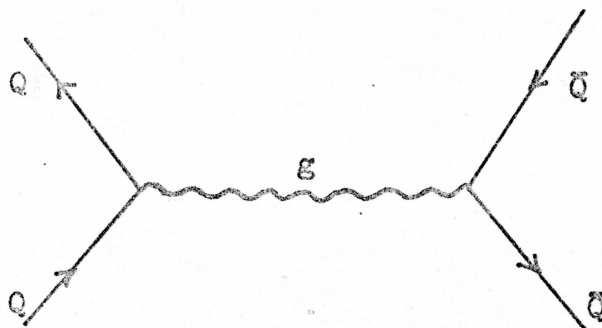
$$u'' + u_f \left[ E - V(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{m_f r^2} \right] u = 0 \quad (5)$$

s okrajovými podmienkami

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = R(0) \sim r^\ell \quad (6)$$

kde  $R(r)$  je radiálna vlnová funkcia a  $\ell$  je orbitálne kvantové číslo.

Problémom je voľba potenciálu  $V(r)$ , o ktorom zatiaľ neexistuje dostatok informácií z QCD. Často sa zvykne voľiť potenciál, ktorého tvar je motivovaný myšlienkami kvantovej chromodynamiky. Na malých vzdialenostiach ( $r \rightarrow 0$ ) je interakcia medzi kvarkom a antikvarkom vďaka asymptotickej voľnosti QCD slabá a dominujúcim je vzájomné pôsobenie sprostredkované výmenou jedného gluónu (obr. 3). Analogicky ako v elektrodynamike jednogluónová výmena



Obrázok 3: Jednogluónová výmena

spôsobuje coulombovskú interakciu kvarku a antikvarku v singletnom stave

$$V(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}, \quad (7)$$

kde  $\alpha_s$  je "konštanta jemnej štruktúry" v QCD ( $\alpha_s = g^2/4\pi$ ) a faktor  $(4/3)$  je dôsledkom farby kvarkov.

Vo veľkých vzdialenostiach sa očakáva (napr. na základe strunových modelov alebo výsledkov mriežkovej QCD v limite silnej väzby [78]), že sila medzi kvarkami je konštantná, nezávislá od vzdialenosti; to vedie k lineárnemu uväzňujúcemu potenciálu

$$V(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \sigma r, \quad \sigma = \text{konšt.} \quad (8)$$

Najjednoduchšou interpoláciou medzi coulombovským a lineárnym potenciálom je tzv. cornellský potenciál [31, 79]

$$V(r) = -a/r + \sigma r \quad (9)$$

s optimálnymi parametrami  $a = 0,52$ ,  $\sigma = 0,18$ .<sup>1)</sup>

Zložitejšiu interpoláciu navrhli Bhanot a Rudaz [80]

$$V(r) = \begin{cases} -0,8/r & \text{pre } r < 0,9 \\ 0,846 \ln \frac{r}{r_0} & \text{pre } 0,9 \leq r \leq 7,0 \\ 0,12r & \text{pre } r > 7,0 \end{cases} \quad (10)$$

Iní autori vychádzajú z očakávaného tvaru kvark-antikvarkového potenciálu v hybnostnej reprezentácii

$$V(q^2) = -\frac{4}{3} \alpha_s(q^2) \frac{4\pi}{q^2} \quad (11)$$

pričom potenciál v súradnicovej reprezentácii sa získa Fourierovou transformáciou

$$V(r) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} V(q^2) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \quad (12)$$

Žiaden voľný parameter (okrem hmotností kvarkov) neobsahuje Richardsonov potenciál [81], v ktorom

$$\alpha_s(q^2) = \frac{4\pi}{b_0 \ln(1 + q^2/\Lambda^2)} \quad (13)$$

kde  $b_0 = \frac{33 - 2n_f}{3}$  [pozri vzťah (1.7)] a  $\Lambda$  je (do značnej

<sup>1)</sup> Parametre potenciálov udávame v GeV.

miery) fixované experimentálnymi údajmi. Zložitejšiu formu navrhli napr. Buchmüller et al. [82] a Drjomin a Leonidov [83].

Ďalšia skupina autorov úspešne použila aj potenciály, ktorých tvar nie je odôvodnený v rámci QCD. Napr. Quigg a Rosner [84] použili logaritmický potenciál

$$V(r) = C_0 \ln \frac{r}{r_0} \quad (14)$$

kde  $C_0 = 733 \text{ MeV}$  a  $r_0^2 = 2/m_q^2$ , ktorý dáva rozštiepenie hladín 1S a 2S stavov konštantné, nezávislé od hmotnosti kvarku (pozri Tab. 1 - 2); Martin [85] navrhol tvar

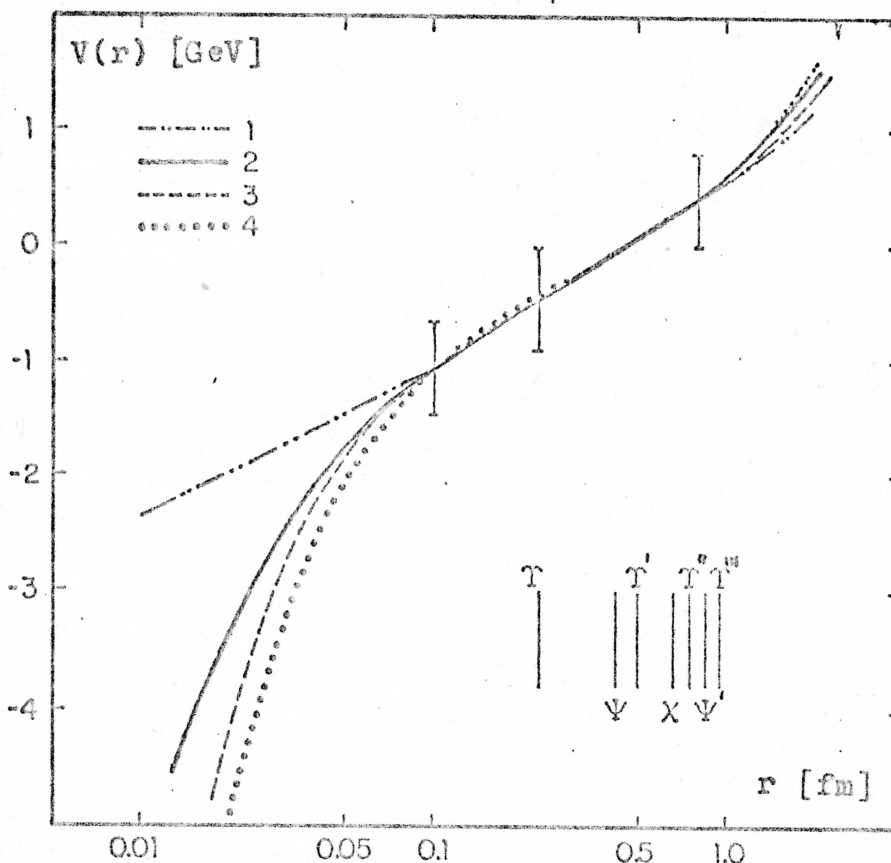
$$V(r) = A + B \cdot r^\alpha \quad (15)$$

kde  $A = -8064 \text{ MeV}$ ,  $B = 6870 \text{ MeV}$ ,  $\alpha = 0,1$ .

Vo všetkých uvedených potenciáloch sa volné parametre volia tak, aby sa pri  $m_c \approx 1,5 \text{ GeV}$  a  $m_b \approx 4,8 \text{ GeV}$  reprodukovali energetické hladiny a ďalšie vlastnosti šarmónia a botomónia, pozorované v experimentoch.<sup>1)</sup> Vidno, že existujúce experimentálne údaje nemôžu zafixovať tvar fenomenologického potenciálu. Dôvod je jednoduchý: rezonancie zo skupín  $\Upsilon$  a  $\Upsilon'$  majú charakteristický rozmer rádu 0,1 až 1 fermi, a ich vlastnosti sú citlivé len na správanie potenciálu v tejto oblasti. Táto oblasť je práve prechodovou medzi coulombovským a lineárnym potenciálom; teoreticky nie je o nej, nanešťastie, takmer nič známe. Väčšina fenomenologických potenciálov, ktoré som vymenoval, sa medzi 0,1 a 1 fermi správa rovnako, odlišnosti existujú len v oblasti veľkých a malých  $r$ . Presvedčivo to ilustruje obr. 4, ktorý pochádza z článku Buchmüllera a Tyea [86]. Zvislé čiary označujú charakteristický rozmer častíc

---

<sup>1)</sup> Niektoré problémy potenciálových modelov, napr. s popisom elektromagnetických prechodov v šarmóniu, sa, zdá sa, vyriešili zarátaním relativistických korekcií; podrobnejšie viď [59, 65] a tam citované práce.



Obrázok 4: Rôzne úspešné fenomenologické potenciály

- 1 - Martinov [85], 2 - Buchmüllera et al. [82],  
3 - Bhanota a Rudaza [80], 4 - cornellský [79].

zo skupín  $\psi$  a  $\Upsilon$ .

Veľké nádeje sa vkladajú do objavu viazaných stavov kvarkov typu  $t$  a ich antikvarkov. Ak tieto častice existujú, potom ich charakteristický rozmer bude menší ako 0,1 fermi (pozri odhady vlastností coulombovských viazaných stavov v nasledujúcej kapitole) a svojimi vlastnosťami budú odrážať krátkodosahovú časť medzikvarkového potenciálu  $V(r)$ . Navyše spektrum topónií bude podstatne bohatšie ako spektrum šarmónií a botomónií. Quigg a Rosner na základe semiklasického priblíženia ukázali [75, 87], že počet  $n$  úzkych  ${}^3S_1$  stavov  $Q\bar{Q}$  systému je daný vzťahom

$$n - \frac{1}{4} \approx a \left( \frac{m_t}{m_c} \right)^{1/2} \quad (16)$$

pričom  $a \approx 2$ . Ak je hmotnosť top kvarku medzi 30 a 50 GeV,

očakávame 9 až 11  $^3S_1$  stavov topónia. Na takom bohatom spektre bude možné študovať povahu medzikvarkového potenciálu na malých vzdialenostiach a porovnať ju s predpoveďami na báze asymptotickej voľnosti QCD, ale aj vplyv vákuovej štruktúry, ktorým sa budem zaoberať v nasledujúcich kapitolách.

Na záver tejto kapitoly ešte niekoľko slov o výpočtoch medzikvarkového potenciálu z prvých princípov. Týmto problémom sa v ostatných rokoch venoval rad prác [88 - 94], v ktorých sa medzikvarkový potenciál určoval v rámci mriežkovej formulácie QCD [78, 95] z výpočtov metódou Monte Carlo [96, 97]. Základnou veličinou je Wilsonova slučka definovaná ako

$$W(C) = \text{sp } P \exp \left\{ ig \oint_C \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a dx^\mu \right\} \quad (17)$$

(C je nejaká uzavretá slučka v časopriestore, P označuje dráhové usporiadanie v exponente).<sup>1)</sup> Ak za C zvolíme obdĺžnik so stranou dĺžky T v časovom smere a s druhou stranou dĺžky R, tak potenciál interakcie medzi nekonečne ťažkým kvarkom a antikvarkom vo vzdialenosti R je daný vzťahom

$$V(R) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{T} \ln \langle 0 | W(C) | 0 \rangle \right]. \quad (18)$$

Takúto veličinu a jej analogické veličiny je možné počítať metódou Monte Carlo. Získané výsledky sú v kvalitatívnej zhode s teoretickými predpoveďami, motivovanými myšlienkami QCD [88 - 94]. Medzikvarkový potenciál sa síce líši od úspešných fenomenologických potenciálov, zdá sa však, že odchýlky možno pripísať na vrub vplyvu ľahkých kvarkov [98], ktorý bol zanedbaný vo výpočtoch [88 - 94].

---

<sup>1)</sup> Podrobnejšie o Wilsonovej slučke pozri napr. v [42].

## Hlava II. CIELE DIZERTÁCIE

Cieľom predkladanej kandidátskej dizertačnej práce je podrobné štúdium toho, ako sa štruktúra vákua v QCD prejavuje vo vlastnostiach veľmi ťažkých kvarkónií. Základom sú dva z možných prístupov k problému: Prvý sa zakladá na zovšeobecnení pôvodných výpočtov Leutwylera a Vološina a je blízky rezolventnej metóde, ktorá sa používala napr. vo výpočtoch šarmóniového spektra s uvážením vplyvu viazaných rozpadových kanálov [79]. Druhý prístup využíva chromodynamické súčtové vzťahy, ktoré pôvodne navrhli Šifman, Vajnštejn a Zacharov [27].

Špeciálne je cieľom preskúmať nasledujúce problémy:

- a) nájsť všeobecnejšiu metódu výpočtu, ktorá výsledky Leutwylera a Vološina reprodukuje ako najnižšie priblíženie a umožňuje odhadnúť ich spoľahlivosť;
- b) preskúmať potenciálnu relevantnosť vyšších korekcií;
- c) vyšetriť zvláštnosti súčtových vzťahov pri ich použití na výpočet vplyvu gluónového kondenzátu na vlastnosti veľmi ťažkých kvarkónií;
- d) porovnať obe metódy, nájsť ich obmedzenia, rozdiely a presnosť.

Uvedeným cieľom poslúžia i jednoduché kvantovomechanické modely, ktoré ilustrujú rôzne črty oboch metód.



### Hlava III. METÓDA VÝPOČTU VPLYVU VÁKUOVÝCH KONDENZÁTOV NA VLASTNOSTI VEĽMI ŤAŽKÝCH KVARKÓNÍÍ

#### Kapitola 4. NAJNIŽŠIE PRIBLÍŽENIE

Viazané stavy veľmi ťažkých kvarkov a antikvarkov sú vďaka asymptotickej voľnosti QCD analogické atómu vodíka. Výmena jedného gluónu (obr. 3.3) vedie ku coulombovskému interakčnému potenciálu [viď vzťah (3.7)]. Očakávaná zložitá štruktúra chromodynamického vákua však spôsobuje podstatné odchýlky vlastností ťažkých (aj veľmi ťažkých) kvarkónií od jednoduchého coulombovského správania. V nedávnej dobe sa objavilo niekoľko článkov, ktoré sa usilujú zahrnúť neporuchové efekty, efekty štruktúry vákua, do popisu ťažkých kvarkónií. Ide tu o niekoľko problémov súčasne:

1. Zistiť, či sa vplyv vákbovej štruktúry dá zachytiť vo forme nejakého efektívneho, podľa možnosti lokálneho, interakčného potenciálu, aký vystupuje vo fenomenologických potenciálových modeloch.
2. Ak áno, akým spôsobom štruktúra vákua modifikuje jednoduchý coulombovský potenciál, pochádzajúci z jedno-gluónovej výmeny.
3. Nájsť spôsob, ako vplyv štruktúry vákua na veľmi ťažké kvarkóniá systematicky zrátať.

Priekopnícke práce, ktoré sa snažia spočítať vplyv štruktúry vákua na veľmi ťažké kvarkóniá, napísali Vološin [32] a Leutwyler [33]. Prehľad ich prístupu je venovaná celá táto kapitola. Sústredím sa predovšetkým na základné fyzikálne predstavy, z ktorých ich výpočet vychádza; niektoré technické detaily presuniem do nasledujúcej kapitoly, kde výsledky Leutwylera a Vološina reprodukujem ako najjednoduchšiu aproximáciu v rámci všeobecnejšieho prístupu.

Najprv však - pre účely ďalšej kvalitatívnej diskusie - zhrniem odhady základných vlastností coulombovských viazaných stavov.

#### 4.1. Odhady základných vlastností coulombovských viazaných stavov

Jednoglúónová výmena medzi kvarkom a antikvarkom (obr. 3.3 a 1) vedie k interakčnému potenciálu

$$V(r) = (\text{farebný faktor}) \cdot \left(-\frac{\alpha_s}{r}\right) \quad (1)$$

Farebný faktor závisí od výsledného farebného stavu, v ktorom sa kvark a antikvark nachádzajú: dokopy tvoria buď farebný singlet alebo oktet. V singletnom stave je daný výrazom (obr. 1a)

$$\frac{1}{3} \text{sp} \left( \frac{\lambda^a}{2} \cdot \frac{\lambda^a}{2} \right) = \frac{4}{3} \quad (2)$$

(cez dvakrát opakované indexy sa sčítuje!), kým v oktetnom stave máme (obr. 1b)

$$\frac{1}{4} \text{sp} \left( \frac{\lambda^a}{2} \cdot \frac{\lambda^b}{2} \cdot \frac{\lambda^a}{2} \cdot \frac{\lambda^b}{2} \right) = -\frac{1}{6} \quad (3)$$

Medzikvarková interakcia sprostredkovaná jedným gluónom je teda príťažlivá v singletnom a odpudivá v oktetnom stave.

Pre nerelativistický systém dvoch častíc, ktoré interagujú coulombovským potenciálom

$$V(r) = -\frac{\beta}{r} \quad ; \quad \beta = 4\alpha_s/3 \quad (4)$$

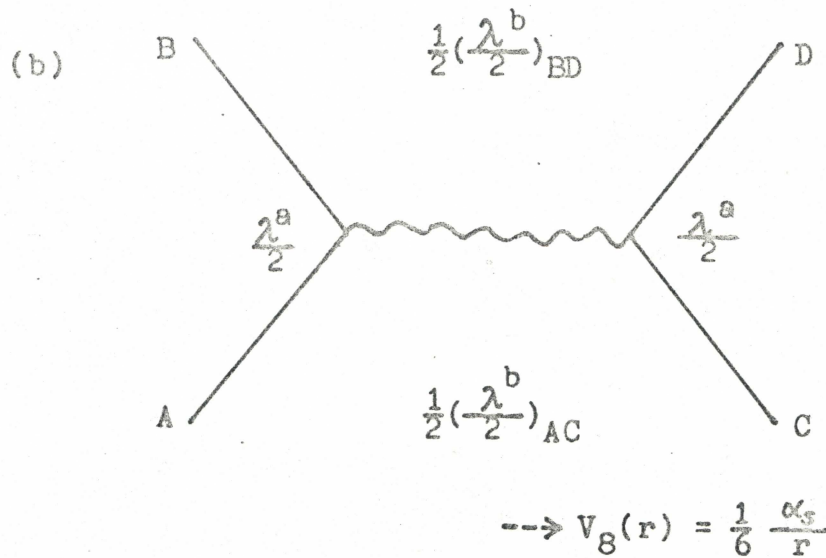
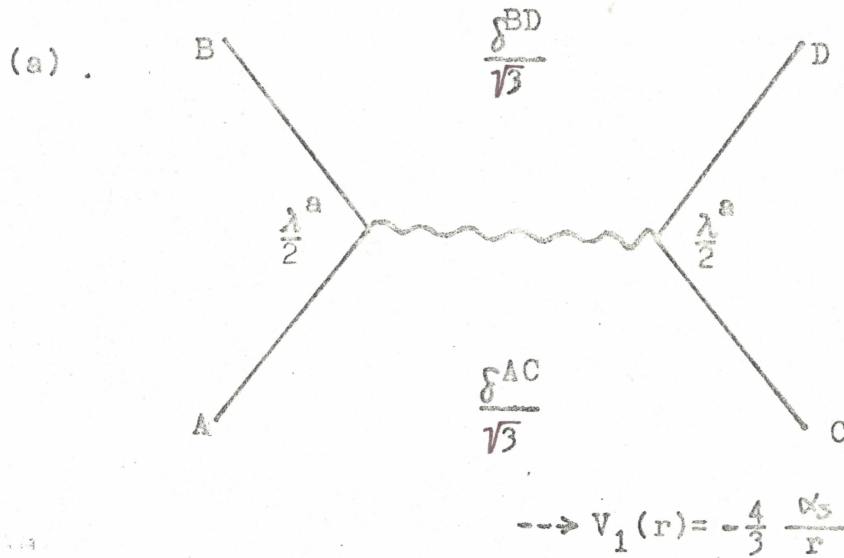
sú energetické hladiny viazaných stavov dané výrazom

$$E_n = -\frac{1}{2} \beta^2 \mu \frac{1}{n^2} \quad (5)$$

kde  $\mu$  je redukovaná hmotnosť,  $\mu = m_f/2$ , takže

$$E_n = - \frac{\beta^2 m_f}{4 \mu^2} \quad (6)$$

Charakteristické vzdialenosti a hybnosti sú definované



Obrázok 1: Kvark-antikvarkový potenciál z jednogluónovej výmeny

(a) v singletnom stave, (b) v oktetnom stave.

prostredníctvom vzťahu

$$E_n = -k_n^2/m_g = -\beta/2r_n, \quad (7)$$

t. j.

$$r_n = \frac{2n^2}{m_g \beta} = \frac{3n^2}{2m_g \alpha_s} \quad (8)$$

a

$$k_n = \frac{\beta m_g}{2n} = \frac{2 \alpha_s m_g}{3n} \quad (9)$$

Periódá obehu kvarku okolo antikvarku bude rádu

$$t_n = \frac{r_n}{k_n/m_g} = \frac{4n^3}{m_g \beta^2} = \frac{9n^3}{4m_g \alpha_s^2} \quad (10)$$

Na rádové odhady použijem výraz pre efektívnu väzbo-  
vú konštantu silných interakcií [pozri vzťah (1.7)]  
v tvare

$$\alpha_s(m_c^2) = \frac{\alpha_s(m_c^2)}{1 + \frac{33 - 2n_f}{12\pi} \alpha_s(m_c^2) \ln \frac{m_g^2}{m_c^2}} \quad (11)$$

s hodnotou  $\alpha_s(m_c^2) = 0,2$ , a  $n_f = 3$  pre  $m \leq m_c$ , 4 pre  $m \leq m_b$  a 5 pre  $m \leq m_t$ . Výsledky zhrňa Tabuľka 1.

#### 4.2. Základné myšlienky výpočtu vplyvu gluónového kondenzátu

Ako som sa snažil ilustrovať v druhej kapitole, vá-  
kuum QCD a spektrum jeho excitácií sa podstatne odlišujú  
od toho, čo by sa dalo očakávať v rámci poruchovej teórie.  
Základný stav v chromodynamike zrejme obsahuje zložité  
fluktuácie kalibračných polí, ktorých charakteristickú  
vlnovú dĺžku budem označovať R a charakteristický čas T.

Tabuľka 1: Základné vlastnosti coulombovských viazaných stavov

Typ kvarku	Hmotnosť $m_q$ [GeV]	$\alpha_s(m_q^2)$	$k_1$ [MeV]	$r_1$ [fm]	$t_{1/2}$ [ $10^{-25}s$ ]
c	1,5	0,200	200	0,987	5,70
b	4,8	0,153	490	0,403	3,04
t	30(?)	0,114	2280	0,086	0,88
	50(?)	0,106	3530	0,056	0,61

Neporuchové fluktuácie kalibračného poľa vo vákuu musia viesť aj k podstatnej modifikácii medzikvarkovej interakcie v kvarkóniu. Fyzikálne si situáciu možno predstaviť takto: Reálne kvarkónium je viazaný stav kvarku a antikvarku, ktoré sú ponorené do fluktuujúceho gluónového prostredia, a musí byť farebným singletom. To sa dá uskutočniť jednak tak, že kvark a antikvark sú v singletnom farebnom stave a podobne aj gluónové prostredie, ale aj tak, že kvark a antikvark sú v oktetnom stave a aj okolité prostredie je farebný oktet, celok je však singlet. Je to možné vďaka grupovému vzťahu [99]

$$8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 27. \quad (12)$$

Kvark a antikvark si vďaka interakcii s prostredím môže neustále vymieňať farbu s vákuovými poľami, a tak preskakovať zo singletného do virtuálneho oktetného farebného stavu. Interakcia medzi kvarkom a antikvarkom v singletnom stave je však podstatne odlišná od oktetnej interakcie [porovnaj vzťahy (2) a (3)] a je logické, že interakcia s vákuovými poľami zapríčiňuje značné zmeny vlastností kvarkónií.

Vplyv neporuchových fluktuácií kalibračných polí sa dá najjednoduchšie skúmať, ak je hmotnosť kvarkov v kvar-

kóniu veľmi veľká. Vtedy možno zanedbať vákuové fluktuácie kvarkových polí a ťažký kvark a antikvark sú skutočne ťažby skúšobné náboje ponorené vo vonkajšom gluónovom poli. Kvarkónium je pritom nerelativistický systém s charakteristickým rozmerom  $r$  rádu  $(m_q \alpha_s)^{-1}$  [vzťah (8)] a obežnou periódou  $t$  rádu  $(m_q \alpha_s^2)^{-1}$  [vzťah (10)].

Ak si všimame natoľko ťažké kvarkónium, že  $r \ll R$ ,  $t \ll T$ , potom môžeme zanedbať časovú závislosť kalibračných polí, a využiť na popis interakcie kvarku a antikvarku s vákuovým polom multipólový rozvoj, ktorý má analogický tvar ako v QED. Vedúcim členom je chromoelektrická dipólová interakcia.

Treba poznamenať, že  $r \sim t \alpha_s^{-1} \ll t$ . Ak sú teda charakteristická dĺžka  $R$  a charakteristický čas  $T$  vákuových fluktuácií rovnakého rádu (čo je prirodzené očakávať), tak podmienka  $t \ll T$  je veľmi dôležitá a ohraničuje použiteľnosť popisovaného prístupu. Ak  $t \sim T$ , treba zväžiť retardačné efekty a kvarkónium sa nedá chápať ako  $Q\bar{Q}$  systém vo vonkajšom (homogénnom) farebnom poli.

Žiaľ, o charakteristickej škále vákuových fluktuácií je dnes len málo známe. Baier a Pinelis [100] naznačujú, že podmienky  $r \ll R$ ,  $t \ll T$  sú možno splnené len pre extrémne ťažké kvarky a že dominujú vákuové fluktuácie malých rozmerov. Nedávne výsledky výpočtu korelačnej dĺžky gluónového kondenzátu však, zdá sa, protirečia ich domnienke [101].

#### 4.3. Leutwylerov-Vološinov vzťah

Zhrnúc predchádzajúci odstavec, v najnižšom priblížení môžeme vplyv gluónového kondenzátu na ťažké kvarkóniá spočítať tak, akoby sa kvark a antikvark pohybovali vo vonkajšom farebnom elektrickom poli  $\vec{E}^a$ . Situácia je analogická ako pri Starkovom jave v atóme vodíka a výsledný efekt je ľahké odhadnúť. Napr. zmena pôvodne coulombovskej

energetickej hladiny s hlavným kvantovým číslom  $n$  a orbitálnym kvantovým číslom  $l$  sa určí zo vzťahu z druhého rádu teórie porúch <sup>1)</sup>

$$\Delta E_{nl} = \sum_k \frac{|\langle nl | \vec{d}^a \cdot \vec{E}^a | k \rangle|^2}{E_{nl} - E_k} \quad (13)$$

$\vec{d}^a$  je chromoelektrický dipólový moment  $Q\bar{Q}$  páru. Výsledok bude zrejme úmerný

i) štvorcu charakteristického rozmeru kvark-antikvarkového viazaného stavu [vzťah (8)]

$$r^2 \sim n^4 / m_q^2 \alpha_s^2, \quad (14)$$

čo pochádza z dipólovej interakcie v druhom ráde;

ii) prevrátenej hodnote charakteristickej energie systému [vzťah (7)]

$$E_{nl}^{-1} \sim n^2 / m_q \alpha_s^2 \quad (15)$$

vďaka energetickému menovateľu vo vzťahu (13);

iii) strednej hodnote štvorca chromoelektrického poľa vo vákuu  $\langle 0 | \vec{E}^a \cdot \vec{E}^a | 0 \rangle$ , ktorá je úmerná (pozri Dodatok A) gluónovému kondenzátu

$$G^2 \equiv \langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle. \quad (16)$$

Očakávaný výsledok je

$$\frac{\Delta E_{nl}}{|E_{nl}|} \sim \frac{1}{m_q^4 \alpha_s^6} G^2 n^8 \quad (17)$$

v úplnom súhlase so vzťahom, ktorý odvodili Leutwyler a Vološin [32, 33]

<sup>1)</sup> Prvý rád (lineárny Starkov jav) chýba, lebo vákuová stredná hodnota  $\langle 0 | \vec{E}^a | 0 \rangle$  je nulová v dôsledku invariantnosti vákuua voči rotáciám vo farebnom priestore.

$$\frac{\Delta E_{nl}}{|E_{nl}|} = \rho G^2 n^3 a_{nl} \quad (18)$$

kde  $\rho = 4\pi^2/m_q^4 \beta^6$ , a  $a_{nl}$  sú koeficienty rádu 1. Podrobnejšie odvodenie vzťahu (18) odkladám do piatej kapitoly. V Tabuľke 2 je uvedená hodnota zmeny energie najnižšieho stavu ( $n = 1, l = 0$ ) pre rôzne hmotnosti kvarku [ $\alpha_s$  bolo odhadnuté pomocou vzťahu (11)] a pre "kánonickú" hodnotu  $G^2 = 0,012 \text{ GeV}^4$  [vzťah (2.17)]. Hodnota  $\Delta E/|E|$  silne závisí od hodnoty  $\alpha_s$  na škále kvarkónia; korekcia k základnej hladine šarmónia je však podstatne väčšia ako 100% pre všetky realistické hodnoty  $\alpha_s(m_c^2)$ , v botomóniu je menšia ako 100% až pri veľmi vysokej hodnote  $\alpha_s(m_b^2)$  ( $\geq 0,25$ ).

Tabuľka 2: Relatívna zmena hodnoty energie najnižšieho stavu kvarkónia podľa vzťahu (18)

$m_q$	$\Delta E_{nl} /  E_{nl} $
1,5 (c)	$\sim 380$
4,8 (b)	$\sim 18$
30 (t ?)	0,070
50 (t ?)	0,014

#### 4.4. Poznámka o neadekvátnosti potenciálového prístupu

Na začiatku tejto kapitoly bola o. i. sformulovaná otázka, či je možné zachytiť efekty gluónového kondenzátu pomocou efektívneho lokálneho potenciálu interakcie medzi kvarkom a antikvarkom.<sup>1)</sup> Pokiaľ by dominovali váku-

<sup>1)</sup> Pokusy tohto druhu uskutočnili aj Soni a Tran [102]



ové fluktuácie malých rozmerov, potom sa príslušný lokálny potenciál dá nájsť [100]. V opačnom prípade - a to sa zdá byť pravdou - ak dominujú dlhovlnné fluktuácie, Vološin a Leutwyler [32, 33] tvrdia, že efektívny lokálny potenciál neexistuje. Analogická situácia je známa v inej oblasti fyziky <sup>1)</sup>: V supravodiči vzniká kondenzát tzv. Cooperových párov. Vďaka nim sa tu objavujú nelokálne efekty rádu koherenčnej dĺžky, ktorá súvisí s rozmermi Cooperových párov. Dôsledkom je, že rovnice elektrodynamiky v supravodiči sú nelokálne.

Vološin [32] uvádza niekoľko argumentov proti existencii lokálneho potenciálu popisujúceho neporuchové efekty. Najjednoduchší z nich sa zakladá na nasledujúcej úvahe: Potenciál, vedúci k posunom energetických hladín podľa vzťahu (18), by z jednoduchých rozmerových dôvodov mal byť úmerný <sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} V(r) &\sim \frac{r^2}{\epsilon_{char}} G^2 \sim \frac{r^2}{p^2/m_F} G^2 \sim \\ &\sim \frac{r^2}{1/m_F r^2} G^2 \sim m_F r^4 G^2 \end{aligned} \quad (19)$$

napr. <sup>3)</sup>

$$V(r) = \lambda m_F G^2 r^4. \quad (20)$$

a Flory [103]. Ich závery sú však, zdá sa, chybné [104, 105]. (Pozri aj články [106]).

<sup>1)</sup> Túto pedagogickú analógiu uvádza Gottfried v poznámke 1 článku [107].

<sup>2)</sup> Vedie k nemu analogická úvaha ako za vzťahom (13) a použitie princípu neurčitosti.

<sup>3)</sup> K potenciálu rovnakého typu dospeli Bell a Bertlmann pri štúdiu súčtových vzťahov ŠVZ na potenciálových modeloch [109].

Nie je však možné nájsť takú univerzálnu konštantu  $\lambda$ , ktorou by sa reprodukovali posuny (18).

Jednoduché overenie tohto tvrdenia poskytuje Tabuľka 3 (z Kubincovej práce [108]). Pre hodnoty  $m_q = 20$  GeV,  $G^2 = 0,012$  GeV<sup>4</sup> a  $\alpha_s = 0,15$  sa tu našla konštantka  $\lambda \doteq 0,0659$  z požiadavky, aby numerickým riešením Schrödingerovej rovnice s potenciálom (20) vyšla taká hodnota energie základného stavu, aká vyplýva zo vzťahu (18). Z Tabuľky 3 vidno, že s touto hodnotou  $\lambda$  nie je možné reprodukovat' predpovedané posuny vyšších hladín.

Tabuľka 3: Porovnanie posunov energetických hladín ťažkého kvarkónia, počítaných pomocou interakčného potenciálu  $\lambda m_q G^2 r^4$  a pomocou Leutwyler-Vološinovho (LV) vzťahu  
( $\lambda = 0,0659$ ,  $m_q = 20$  GeV,  $G^2 = 0,012$  GeV<sup>4</sup>,  $\alpha_s = 0,15$ )

n	l	$\Delta E_{nl}$ z potenciálu	$\Delta E_{nl}$ z LV vzťahu
1	0	0,0136 (input)	0,0136
2	0	0,1916	0,9386
3	0	0,5061	11,2039
2	1	0,1124	0,5910
3	1	0,3892	9,1803
3	2	0,2467	5,4232

Bertlmann a Bell [105] našli zložitejší potenciál, ktorý v prvom poruchovom priblížení reprodukuje posuny energetických hladín dané vzťahom (18) s 1% presnosťou. Jeho tvar je

$$V(r) = \frac{4\pi^2}{81\beta} G^2 \left\{ r^3 - \frac{304}{81} \frac{r^2}{m_q \beta} + \frac{53}{10} \frac{r}{m_q^2 \beta^2} - \frac{113}{100} \frac{1}{m_q^3 \beta^3} \right\} \quad (21)$$

Ani pomocou tohto potenciálu však nemožno reprodukovat napr. korekcie k leptónovým šírkam rozpadu ťažkých kvarkónií [104]. Navyše, potenciál závisí od hmotnosti kvarku  $m_q$ ; takéto potenciály obyčajne uspokojivo nepopisujú experimentálne údaje o šarmóniu a botomóniu (pozri analýzu v článku [110]).<sup>1)</sup>

## Kapitola 5. VŠEOBECNEJŠIA METÓDA VÝPOČTU

Predchádzajúca kapitola naznačila cestu k výpočtu vplyvu gluónového kondenzátu na vlastnosti ťažkých kvarkónií. Ukazuje sa však (pozri Tab. 4.2), že popísaný prístup je nepoužiteľný pre existujúce kvarkóniá. Potrebná je všeobecnejšia metóda, v rámci ktorej by bolo možné počítať korekcie k LV výsledku. Cieľom tejto kapitoly je popísať jednu takúto metódu. Vychádza z rovnakých fyzikálnych predpokladov ako Leutwyler a Vološin a ich výsledky obsahuje ako prvé priblíženie. Navrhovaná metóda si však vyžaduje hlbšiu znalosť (alebo model) správania gluónového prostredia v QCD, ktorá v súčasnosti podľa našich vedomostí nie je k dispozícii.

Snažím sa preto v rámci tejto kapitoly vyšetriť aspoň jednoduchý model, ktorý má mnoho spoločných črt s fyzikou ťažkých kvarkónií. V rámci neho možno otestovať navrhovanú metódu a zároveň posúdiť dôležitosť členov, ktoré sa v prístupe Vološina a Leutwylera zanedbávajú.

### 5.1. Prečo najnižšie priblíženie nie je postačujúce

Výsledky Leutwylera a Vološina majú principiálny význam. Boli však získané pomocou kvantovomechanickej teórie porúch, pričom porucha je efektívne úmerná gluónovému kondenzátu. Použitie najnižšieho člena poruchového radu by bolo odôvodnené, ak by  $\Delta E/|E|$  bolo malé. Žiaľ, aj ten naj-

---

<sup>1)</sup> Samozrejme, to isté platí o potenciáli (20).

optimistickejši odhad vedie k  $\Delta E/|E| \gg 1$  pre kvarky typu c a  $\Delta E/|E| \gtrsim 1$  pre kvarky typu b (pozri časť 4.3). Niektorí autori sa pokúsili o výpočet menej citlivých vlastností botomónií, pre ktoré by mohol byť poruchový parameter menší, avšak bez väčšieho úspechu [111 - 113].

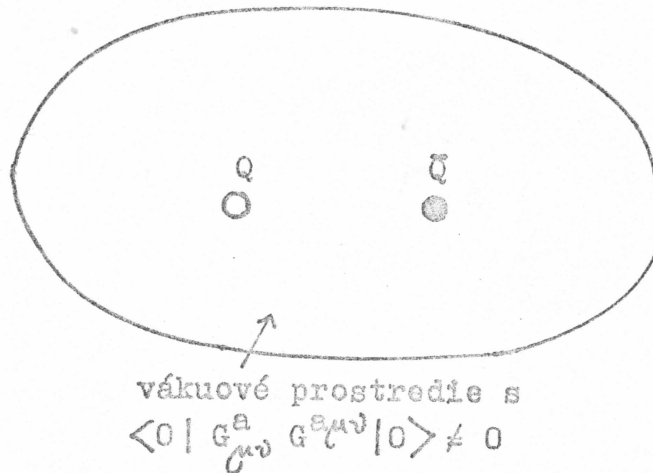
Iný dôvod pre hľadanie všeobecnejšej metódy výpočtu vplyvu vákuovej štruktúry je v tom, že aj pre topóniá, pre ktoré by LV priblíženie malo byť postačujúce, je potrebná predstava o zanedbaných korekciách vyššieho rádu. Bolo by zaujímavé zistiť, či neexistujú situácie, v ktorých sa dajú očakávať podstatné korekcie k LV výsledku.

## 5.2. Popis metódy

Študovaný systém si môžeme predstaviť ako izolovanú sústavu, ktorá obsahuje kvark-antikvarkový ( $Q\bar{Q}$ ) pár spolu s gluónovými stupňami voľnosti. V prvom priblížení môžeme predpokladať, že pár je ponorený v náhodnom vákuovom kalibračnom poli (obr. 1) charakterizovanom štvorpotenciálom  $A_a^a(x)$ .  $Q\bar{Q}$  pár môže byť v singletnom alebo oktetnom stave (zodpovedajúce projektory označím  $P_S, P_A$ ), projektory na singletný, resp. oktetný farebný stav gluónového prostredia označím  $\Pi_S, \Pi_A$ . Celý systém musí byť farebným singletom.

Ďalší predpoklad spočíva v možnosti rozdeliť hamiltonián singletného systému, ktorý sa skladá z  $Q\bar{Q}$  páru (s veľkým  $m_Q$ ) a gluónového prostredia, na tri časti: kvarkový hamiltonián, v ktorom je zahrnutá aj coulombovská interakcia medzi kvarkom a antikvarkom, spôsobená výmenou krátkovlnných ("tvrdých") gluónov; hamiltonián gluónového prostredia; a interakčný hamiltonián, ktorý popisuje interakciu páru s vákuovými fluktuáciami:

$$H = H_{Q\bar{Q}} + H_G + H_{\text{int}} \quad (1)$$



Obrázok 1:  $Q\bar{Q}$  pár v konštantnom vákuovom kalibračnom poli

Kvarkový hamiltonián bude mať tvar (pozri časť 4.1) <sup>1)</sup>

$$H_{a\bar{a}} = P_1 \left( -\frac{\Delta}{m_q} - \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \right) P_1 + P_8 \left( -\frac{\Delta}{m_q} + \frac{1}{6} \frac{\alpha_s}{r} \right) P_8. \quad (2)$$

O gluónovom hamiltoniáne je známe len málo; budeme o ňom predpokladať, že jeho energetické spektrum začína od nulovej energie

$$H_G |0_g\rangle = 0 \quad (3)$$

$|0_g\rangle$  označuje vákuum gluónového prostredia].

<sup>1)</sup> Pre skrátenie píšem  $P_1 \equiv P_S \Pi_S$ ,  $P_8 \equiv P_A \Pi_A$ .  $P_8$  pritom nie je oktetný projektor, ale projektuje na singletný systém, ktorého časti ( $Q\bar{Q}$  pár a prostredie) sú v oktetných farebných stavoch. Projektor na celkový singlet pre jednoduchosť nepíšem, len mlčky predkladám jeho prítomnosť.

Interakčný hamiltonián nám poskytuje multipólový rozvoj, analogický ako v QED (pre QCD bol rozpracovaný v článkoch [114 - 118], pozri aj [64]). Jeho vedúce členy sú [32, 33]

$$H_{\text{int}} = Q^a A_0^a(0) - \vec{d}^a \cdot \vec{E}^a(0), \quad (4)$$

pričom predpokladáme, že počiatok súradnicovej sústavy je umiestnený v hmotnom strede  $Q\bar{Q}$  páru. Vo vzťahu (4)  $Q^a$  je farebný náboj páru

$$Q^a = \frac{1}{2} g t^a = \frac{1}{2} g (t_1^a + t_2^a), \quad (5)$$

$\vec{d}^a$  je vektor chromoelektrického dipólového momentu

$$\vec{d}^a = \frac{1}{2} g \xi^a \vec{r} = \frac{1}{2} g (t_1^a - t_2^a) \vec{r}, \quad (6)$$

$t_1^a, t_2^a$  sú generátory farebnej grupy  $SU(3)$  pre kvark a antikvark a  $\vec{E}^a(x)$  je chromoelektrické pole vákuovej fluktuácie.

Treba poznamenať, že rozdelenie hamiltoniánu  $H$  na  $H_{Q\bar{Q}}, H_G$  a  $H_{\text{int}}$  nie je jednoznačné. Interakciu kvarkov s krátkovlnnými gluónmi sme zahrnuli do  $H_{Q\bar{Q}}$ , kým dlhovlnné gluónové fluktuácie prispievajú do  $H_{\text{int}}$ . Zanedbáva sa interakcia medzi oboma typmi gluónov.

Hamiltonián  $H$  možno rozdeliť aj ináč (obr. 2)

$$H = H_1 + H_8 + H' \quad (7)$$

pričom  $H_1$  ( $H_8$ ) je singletná (oktetná) časť  $H$ , ktorá nemieša singletné a oktetné stavy

$$H_1 = P_S \Pi_S H P_S \Pi_S = P_1 H P_1, \quad (8)$$

$$H_8 = P_A \Pi_A H P_A \Pi_A = P_8 H P_8, \quad (9)$$

kým  $H'$  ich mieša

	$H_1$	$H_8$	$H'$
$H_{Q\bar{Q}}$	1 $\longleftrightarrow$ 1 kvarky	8 $\longleftrightarrow$ 8 kvarky	
$H_G$	1 $\longleftrightarrow$ 1 prostredie	8 $\longleftrightarrow$ 8 prostredie	
$H_{int}$		8 $\longleftrightarrow$ 8 interakcia	1 $\longleftrightarrow$ 8 interakcia

Obrázok 2 : Rozdelenie singletného hamiltoniánu na časti  
 - vodorovne, podľa toho, na aké časti ( $Q\bar{Q}$ ,  
 prostredie) systému jednotlivé časti pôsobia;  
 - zvisle, podľa toho, ktoré farebné stavy spá-  
 jajú jednotlivé časti.

$$\begin{aligned}
 H' &= P_S \Pi_S H P_A \Pi_A + P_A \Pi_A H P_S \Pi_S = \\
 &= P_1 H P_8 + P_8 H P_1
 \end{aligned} \tag{10}$$

Keďže  $t^a$  [vzťah (5)] anihiluje singletné stavy a  $\xi^a$  [vzťah (6)] mení singlet na oktet a oktet na superpozíciu singletu a oktetu, môžeme  $H_{int}$  písať aj ako

$$\begin{aligned}
 H_{int} &= [P_8 Q^a A_0^a P_8 - P_8 \vec{d}^a \cdot \vec{E}^a P_8] - \\
 &\quad - P_1 \vec{d}^a \cdot \vec{E}^a P_8 - P_8 \vec{d}^a \cdot \vec{E}^a P_1
 \end{aligned} \tag{11}$$

Jednotlivé časti vo vzťahu (7) potom súvisia s  $H_{Q\bar{Q}}$ ,  $H_G$  a  $H_{int}$  takto

$$\begin{aligned}
 H_1 &= P_1 H_{Q\bar{Q}} P_1 + P_1 H_G P_1 = \\
 &= P_1 \left( -\frac{\Delta}{m_q} - \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \right) P_1 + P_1 H_G P_1, \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_8 &= P_8 H_{Q\bar{Q}} P_8 + P_8 H_G P_8 + P_8 H_{int} P_8 = \\
 &= P_8 \left( -\frac{\Delta}{m_q} + \frac{1}{6} \frac{\alpha_s}{r} \right) P_8 + P_8 H_G P_8 + P_8 H_{int} P_8, \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H' &= P_1 H_{int} P_8 + P_8 H_{int} P_1 = \\
 &= -P_1 \vec{d}^a \cdot \vec{E}^a P_8 - P_8 \vec{d}^a \cdot \vec{E}^a P_1. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Potrebná informácia o  $Q\bar{Q}$  páre vo vákuovom poli je obsiahnutá v úplnej Greenovej funkcii hamiltoniánu  $H$

$$G(E) \equiv (H - E)^{-1} \quad (15)$$

S neúplnou informáciou o chromodynamickom vákuu je nemožné nájsť úplné riešenie problému. Množstvo užitočných informácií sa dá získať, ak sa obmedzíme na kvarkóniovú Greenovu funkciu

$$G_Q(E) \equiv \langle 0_g | P_1 (H - E)^{-1} P_1 | 0_g \rangle, \quad (16)$$

t. j. priemet úplnej Greenovej funkcie na singletné kvarkóniové stavy, ustrednený cez gluónové vákuum. Póly  $G_Q(E)$ , napríklad, zodpovedajú kvarkóniovým energetickým hladinám.

Greenova funkcia  $G_Q(E)$  je v skutočnosti operátor, ktorý pôsobí na singletné farebné stavy kvarkónia. Odvodím preň operátorovú rovnicu, ktorú musí spĺňať [119, 120].<sup>1)</sup>

Pomocou známej operátorovej identity

---

<sup>1)</sup> Podobný prístup použili Eichten et al. [79] pri započítaní vplyvu viazaných rozpadových kanálov na šarmóniové spektrum. Greenovu funkciu  $G_Q(E)$  zaviedol Vološin [32] a odvodil pre ňu poruchový výraz, lineárny v  $G^2$ .



$$\begin{aligned}
 (H-E)^{-1} &= (H_1-E)^{-1} - (H_1-E)^{-1} (H-H_1) (H-E)^{-1} = \\
 &= (H_1-E)^{-1} - (H_1-E)^{-1} (H_8+H') (H-E)^{-1}
 \end{aligned} \quad (17)$$

sa ľahko ukáže, že

$$\begin{aligned}
 G_R(E) &= P_S \langle 0_g | (H_S - E)^{-1} | 0_g \rangle P_S - \\
 &- \langle 0_g | P_1 (H_S - E)^{-1} P_1 H' P_8 (H - E)^{-1} P_1 | 0_g \rangle,
 \end{aligned} \quad (18)$$

kde som využil, že gluónové vákuum je farebný singlet, a  $P_1 H_8 = 0$ . Podobná identita so zameneným  $H_1$  za  $H_8$

$$(H-E)^{-1} = (H_8-E)^{-1} - (H_8-E)^{-1} (H_1+H') (H-E)^{-1} \quad (19)$$

sa dá použiť na vyjadrenie  $P_8 (H - E)^{-1} P_1$  cez  $P_1 (H - E)^{-1} P_1$

$$P_8 (H-E)^{-1} P_1 = - P_8 (H_8-E)^{-1} P_8 H' P_1 (H-E)^{-1} P_1. \quad (20)$$

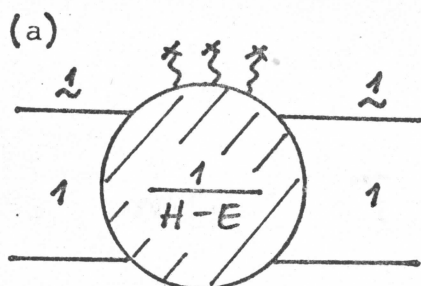
Dosadením do (17) získame rovnicu

$$\begin{aligned}
 G_R(E) &= P_S (H_{Q\bar{Q}} - E)^{-1} P_S + \\
 &+ \langle 0_g | P_1 (H_1 - E)^{-1} P_1 H' P_8 (H_8 - E)^{-1} P_8 H' P_1 (H - E)^{-1} P_1 | 0_g \rangle
 \end{aligned} \quad (21)$$

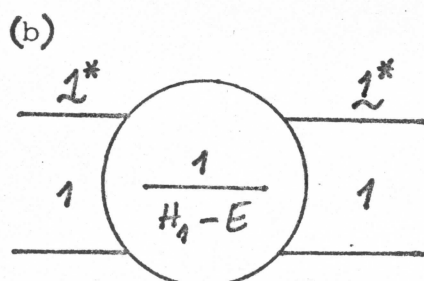
za pomoci vzťahu  $\langle 0_g | (H_1 - E)^{-1} | 0_g \rangle = (H_{Q\bar{Q}} - E)^{-1}$ , ktorý je dôsledkom rovnice (3).

Poslednú identitu ilustruje obrázok 4 (jednotlivé prvky, ktoré v obr. 4 vystupujú, vysvetľuje obr. 3). Jej význam je nasledovný: obe časti systému,  $Q\bar{Q}$  pár a gluónové prostredie, sa buď vyvíjajú bez vzájomnej interakcie, alebo strávia istý čas v singletných farebných stavoch, potom vďaka interakcii, ktorá mieša singletné a oktetné stavy, "preskočia" do singletného celkového stavu, v ktorom však je pár i prostredie oktet, a konečne skočia späť do singletných stavov. Hviezdičky pri 1 a 8 v obrázku 4

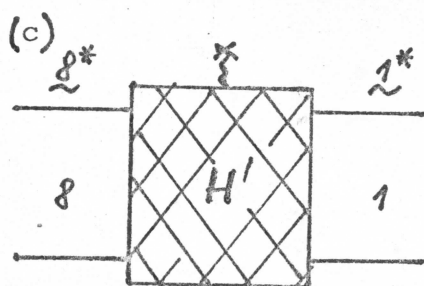
Obrázok 3 : Slovník symbolov, ktoré vystupujú v obrázkoch 4 - 7



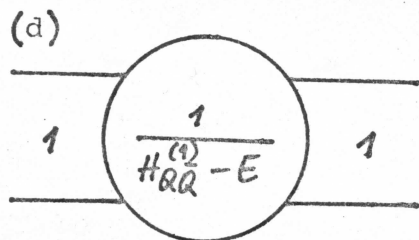
... kvarkóniová Greenova funkcia [vzťah (16)]



... šírenie kvarkónia a gluónového prostredia v singletných stavoch (bez vzájomného pôsobenia)



... interakcia kvarkónia s kondenzátom, pri ktorej dochádza k výmene farebného náboja



... Greenova funkcia singletného  $Q\bar{Q}$  páru;

a podobne.

upozorňujú na možnosť preskokov do excitovaných virtuálnych medzistavov.

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1: } \text{Circle with diagonal line and cross, denominator } H-E, \text{ with } 1 \text{ on both sides.} \\
 & = \text{Diagram 2: } \text{Circle with diagonal line and cross, denominator } H_{Q\bar{Q}}^{(1)}-E, \text{ with } 1 \text{ on both sides.} + \\
 & + \text{Diagram 3: } \text{Circle with diagonal line and cross, denominator } H_1-E, \text{ with } 1 \text{ on both sides.} \\
 & \quad \text{Diagram 4: } \text{Square with cross, } H', \text{ with } 1^* \text{ on top and } 1 \text{ on bottom.} \\
 & \quad \text{Diagram 5: } \text{Circle with diagonal line and cross, denominator } H_2-E, \text{ with } B \text{ on both sides.} \\
 & \quad \text{Diagram 6: } \text{Square with cross, } H', \text{ with } B^* \text{ on top and } B \text{ on bottom.} \\
 & \quad \text{Diagram 7: } \text{Circle with diagonal line and cross, denominator } H-E, \text{ with } 1 \text{ on both sides.}
 \end{aligned}$$

Obrázok 4 . Znázornenie identity, ktorú spĺňa kvarkóniová Greenova funkcia

Aby sme rovnicu (21) ďalej zjednodušili a našli uzavretú operátorovú rovnicu pre  $G_Q(E)$ , musíme použiť ďalší predpoklad o podstate problému. Jednou možnosťou, ktorá vedie k uzavretej rovnici, je predpoklad vákuovej dominantnosti (VD) (obr. 5)

$$\underset{\sim}{1}^* \simeq \underset{\sim}{1} \quad \text{alebo} \quad P_1 \simeq P_S |0_g\rangle \langle 0_g| P_S, \quad (22)$$

ktorým sa zanedbávajú vyššie singletné gluónové excitácie v medzistavoch.

Samozrejme, predpokladom VD vnášame do riešenia ťažko kontrolovateľné priblíženie. Vzťah (22) je však najjednoduchšou možnosťou a je zaujímavé preskúmať jej dôsledky. Možným odôvodnením predpokladu VD je skutočnosť, že v chro-

modynamike sa očakáva energetická medzera medzi základným a excitovanými stavmi (pozri diskusiu v časti 2.1). Ťažké je odôvodniť akýkoľvek iný, rafinovanejší predpoklad bez hlbšej znalosti chromodynamického vákua (pozri aj [106]). Na druhej strane, predpokladom (22) nevylučujeme gluónové prostredie z problému; naďalej tu existuje možnosť prechodov  $Q\bar{Q}$  páru a prostredia zo singletných do oktetných farebných stavov, ktoré podstatne ovplyvňujú kvark-antikvarkovú interakciu v kvarkóniu. Verím preto, že obmedzenie (22) podstatne neskreslí ďalší výpočet.

Predpoklad vákuovej dominantnosti vedie k rovnici (obr. 5)

$$G_Q(E) = G_Q^{(1)}(E) + G_Q^{(1)}(E)K(E)G_Q(E), \quad (23)$$

kde

$$K(E) \equiv \langle 0_g | P_1 H' P_8 (H_8 - E)^{-1} P_8 H' P_1 | 0_g \rangle \quad (24)$$

a  $G_Q^{(1)}$  je Greenova funkcia k hamiltoniánu  $H_{QQ}^{(1)} = -\Delta/m_Q - 4\alpha_s/3r$ , t. j. k singletnej časti  $H_{Q\bar{Q}}$ .

Približnú operátorovú rovnicu pre kvarkóniovú Greenovu funkciu  $G_Q(E)$ , ktorú som práve odvodil, možno napr. použiť na hľadanie energetických hladín kvarkónia. Označme  $\epsilon_n^{(1)}$  a  $|n\rangle$  vlastné hodnoty a vlastné stavy singletného kvarkóniového hamiltoniánu  $H_{QQ}^{(1)}$  a  $\psi_n(\vec{r})$  zodpovedajúce vlnové funkcie.<sup>1)</sup> Potom platí

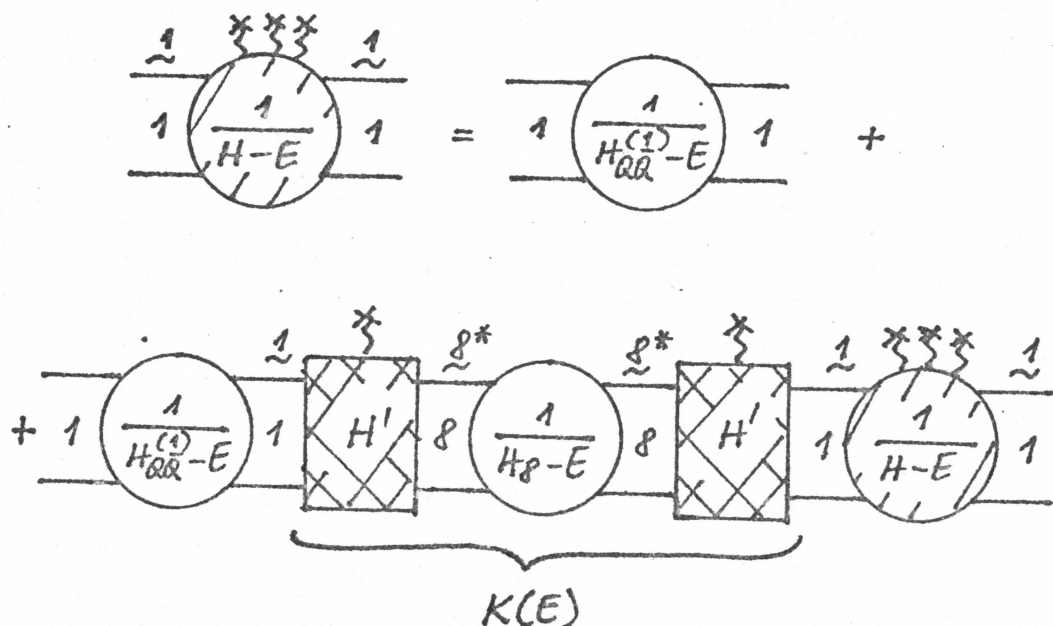
$$\langle \vec{r}' | G_Q(E) | \vec{r} \rangle = \sum_n \psi_n(\vec{r}') \langle n | G_Q(E) | \vec{r} \rangle, \quad (25)$$

kde vďaka vzťahu (23)  $\langle n | G_Q(E) | \vec{r} \rangle$  spĺňa rovnicu

$$\sum_m [(E - \epsilon_n^{(1)}) \delta_{nm} + K_{nm}(E)] \langle m | G_Q(E) | \vec{r} \rangle = -\psi_n^*(\vec{r}), \quad (26)$$

kde  $K_{nm}(E) \equiv \langle n | K(E) | m \rangle$ . Pre hodnoty energií kvarkóniových stavov musí mať veličina  $\langle \vec{r}' | G_Q(E) | \vec{r} \rangle$  pól; to je

<sup>1)</sup> Index  $n$  skrýva v sebe množinu indexov, ktoré charakterizujú daný stav.



Obrázok 5 : Uzavretá rovnica pre kvarkóniovú Greenovu funkciu - dôsledok predpokladu o vákuovej dominantnosti

len vtedy možné, ak rovnica (26) nemá pri kvarkóniovej energii riešenie. Príslušnú podmienku možno formálne zapísať v tvare

$$\det [(E - \epsilon_n^{(1)}) \delta_{nm} + K_{nm}(E)] = 0. \quad (27)$$

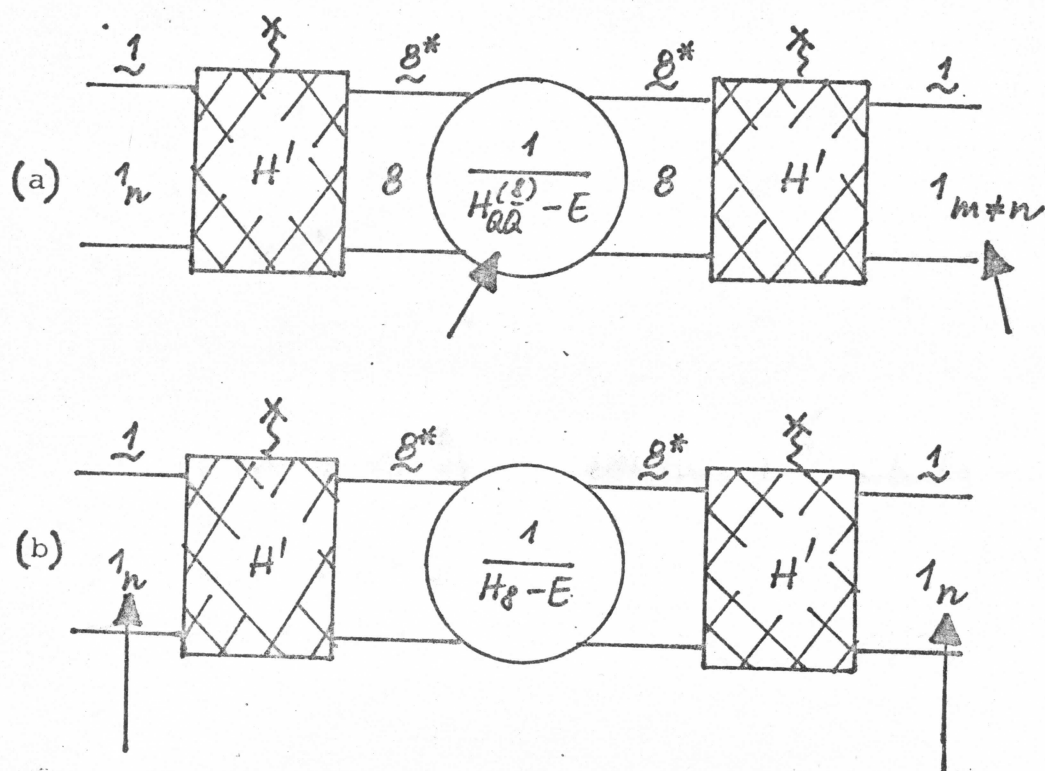
Táto rovnica by sa mohla stať bázou systematického výpočtu zmien kvarkóniových energetických hladín pod vplyvom interakcie s vákuovými poľami. Na to je potrebné vyriešiť dva problémy:

(A) rozumným spôsobom obmedziť nekonečný determinant (nekonečnú sústavu rovníc) vo vzťahu (27) [(26)] na determinant konečného rozmeru (konečnú sústavu rovníc);

(B) nájsť model oktetného hamiltoniánu (13), ktorý vystupuje v operátore  $K(E)$  a z ktorého je známa len časť.

Zrejme bude potrebné nájsť kompromis medzi dvoma extrémnymi možnosťami, ktoré sú znázornené na obr. 6:

(a) využiť len minimum informácie o  $H_0$ , ale zobrať do úvahy väzbu medzi singletnými stavmi; alebo (b) úplne zanedbať väzbu [nediagonálne prvky vo vzťahu (27)] a uvážiť detailnejšie správanie systému v čase, keď sa  $Q\bar{Q}$  pár a gluónové prostredie nachádzajú v singletných stavoch.



Obrázok 6 : Znázornenie dvoch extrémnych možností pri riešení rovnice (27)

Nie je a priori zrejmé, ktorý z uvedených problémov zohrá dôležitejšiu úlohu pri presnom výpočte vlastností topónií. V časti 5.4 preto vyšetrím jednoduchý model, na ktorom je možné vyskúšať rad aproximácií a výsledky porovnať s presným riešením.

Prv však ešte ukážem, ako je v rámci popísaného prístupu možné reprodukovať výsledky, ktoré Leutwyler a Voloshin získali inými metódami.

### 5.3. Cesta späť k priblíženiu Leutwylera a Vološina

Vološinove [32] a Leutwylerove [33] výsledky možno získať z rovnice (27) ako prirodzené najnižšie priblíženie na základe niekoľkých zjednodušení. Najprv však zopakujem LV predpoklady. Okrem prirodzeného predpokladu o invariantnosti gluónového vákua voči farebným a lorentzovským transformáciám predpokladali, že

1) interakcia  $Q\bar{Q}$  páru s vákuovými fluktuáciami je slabá, takže stačí na výpočet zmien energetických hladín použiť druhý rád kvantovomechanickej poruchovej teórie;

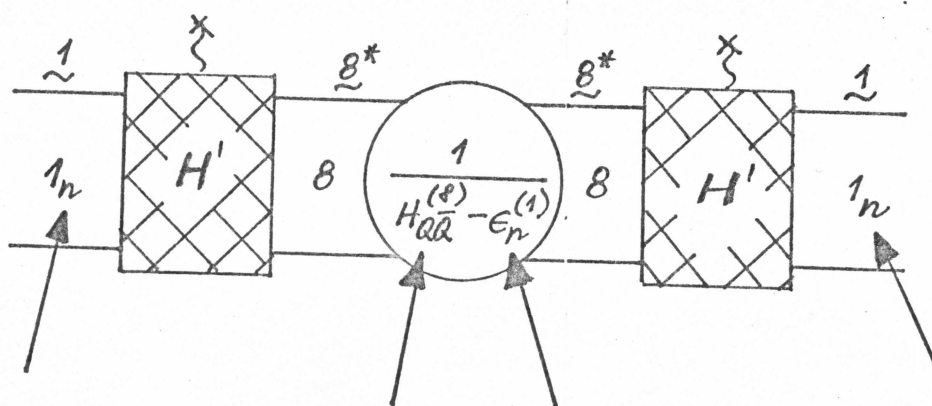
2) energie oktetných gluónových excitácií sú malé v porovnaní s rozdielom medzi energiou kvarkónia v oktetnom a singletnom stave.

Predpoklady, ktoré vedú od rovnice (27) k výsledkom LV sú blízke. Treba (pozri obr. 7):

1) linearizovať rovnicu zanedbaním nediagonálnych prvkov matice  $K_{nm}(E)$  a nahradením  $E$  jej najnižším priblížením  $\epsilon_n^{(1)}$ . Takto výjde

$$\Delta E_n = -\langle n | \langle 0_g | P_1 H' P_1 (H_0 - \epsilon_n^{(1)})^{-1} P_1 H' P_1 | 0_g \rangle | n \rangle. \quad (28)$$

Tento predpoklad zodpovedá zhruba prvému predpokladu LV;



Obrázok 7 : Podstata priblíženia Leutwylera a Vološina

2) zanedbať všetky časti  $H_8$  okrem  $H_{QQ}^{(8)} = -\Delta/w_g + \alpha_s/6r$   
 Takto pomocou (4), (6) a (14) výjde

$$\Delta E_n = -\pi^2 \langle 0_g | \frac{\alpha_s}{\pi} E_i^a E_j^b | 0_g \rangle \langle n | r_i \xi^a G_{QQ}^{(8)}(\epsilon_n^{(1)}) \xi^b r_j | n \rangle \quad (29)$$

kde  $G_{QQ}^{(8)}(E)$  je Greenova funkcia hamiltoniánu  $H_{QQ}^{(8)}$ .

Posledný predpoklad úzko súvisí s druhým predpokladom LV. Aby bol vzťah viditeľný, prepíšem  $P_8 (H_8 - \epsilon_n^{(1)})^{-1} P_8$  v nasledujúcom tvare (označenia by mali byť zrejme)

$$\begin{aligned} P_8 (H_8 - \epsilon_n^{(1)})^{-1} P_8 &= \quad (30) \\ &= \sum_{u_g^s, n_g^s} P_A | u_g^s \rangle \langle u_g^s | (P_A H_{QQ} P_A + P_A H_{int} P_A + P_A H_G P_A - \epsilon_n^{(1)})^{-1} | n_g^s \rangle \langle n_g^s | P_A = \\ &= \sum_{u_g^s, n_g^s} P_A | u_g^s \rangle \langle u_g^s | (P_A H_{QQ} P_A + P_A H_{int} P_A - \epsilon_{u_g^s}^{(8)} - \epsilon_n^{(1)})^{-1} | n_g^s \rangle \langle n_g^s | P_A \end{aligned}$$

Ak zanedbáme príspevok  $H_{int}$  (ináč by sme zahrnuli členy vyššieho ako druhého rádu v gluónových poliach) a  $\epsilon_{m_g}$  (čo zodpovedá druhému LV predpokladu), tak dostaneme

$$P_8 (H_8 - \epsilon_n^{(1)})^{-1} P_8 = P_A (H_{QQ} - \epsilon_n^{(1)})^{-1} P_A \quad (31)$$

a okamžite potom aj vzťah (29).

Farebná a lorentzovská invariantnosť gluónového vákuua (pozri Dodatok A) umožňuje vyjadriť  $\langle 0_g | E_i^a E_j^b | 0_g \rangle$  cez gluónový kondenzát  $G^2$  [vzťah (A.5)]

$$\langle 0_g | \frac{\alpha_s}{\pi} E_i^a E_j^b | 0_g \rangle = -\frac{1}{96} \delta^{ab} \delta_{ij} G^2.$$

Navyše platí

$$\langle \text{singlet. stav} | \xi^a (\text{singlet. operátor}) \xi^b | \text{singlet. stav} \rangle = \frac{2}{3} \delta^{ab}. \quad (32)$$

Vzťahy (A.5) a (32) dosadíme do (29) a získame

$$\Delta E_n = \frac{\pi^2}{18} G^2 \langle n | r_i G_{QQ}^{(8)}(\epsilon_n^{(1)}) r_i | n \rangle, \quad (33)$$

čo je identické s tvarom, ktorý uvádza Vološin (druhý článok v odvolávke [32], vzťah (10)).



Na odvodenie konečného vzťahu [pozri (4.18)] je potrebné dorátať maticový element na pravej strane vzťahu (33). Index  $n$  reprezentuje množinu  $\{n, l, m\}$  hlavného, orbitálneho a magnetického kvantového čísla vodíkupodobného stavu. Od magnetického kvantového čísla výsledok nezávisí; korekcia k  $nl$ -tej hladine preto v súradnicovej reprezentácii bude daná vzťahom

$$\Delta E_{nl} = \frac{\pi^2}{18} G^2 \int d^3\vec{r} d^3\vec{R} \psi_{nlm}^*(\vec{r}) r^i \cdot G_\alpha(\vec{r}, \vec{R}; -k_n^2/m_f) R^i \psi_{nlm}(\vec{R}), \quad (34)$$

kde  $\alpha = -\alpha_s/6$  [väzbová konštanta kvark-antikvarkovej interakcie v oktetnom kanáli, pozri (4.3)],  $\psi_{nlm}(\vec{r})$  sú vodíkupodobné vlnové funkcie [121]

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = (2k_n)^{3/2} \left[ \frac{(n-l-1)!}{2^n (n+l)!} \right]^{1/2} e^{-k_n r} (2k_n r)^l \cdot L_{n-l-1}^{2l+1}(2k_n r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi); \quad \nu = n-l-1, \quad (35)$$

kde  $L_s^p(x)$  sú pridružené Laguerrove polynómy [122]<sup>1)</sup>

$$L_s^p(x) = \frac{e^x}{s! x^p} \left( \frac{d}{dx} \right)^s (e^{-x} x^{s+p}) \quad (36)$$

ďalej

$$G_\alpha(\vec{r}, \vec{R}; E) \Big|_{\alpha = -\frac{\alpha_s}{6}} = \langle \vec{r} | G_{\alpha\bar{\alpha}}^{(f)}(E) | \vec{R} \rangle = \langle \vec{r} | (-\Delta/m_f + \alpha_s/6r - E)^{-1} | \vec{R} \rangle \quad (37)$$

a  $k_n$  je dané vzťahom (4.9). Na výpočet integrálu vo vzťahu (34) je zvlášť vhodná Vološinova reprezentácia coulombovskej Greenovej funkcie (pozri druhý článok v [32] a [3, 112])

$$G_\alpha(\vec{r}, \vec{R}; E) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) G_l^{(\alpha)}(r, R; E) P_l \left( \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{r \cdot R} \right)$$

<sup>1)</sup> V štandardných učebniciach kvantovej mechaniky sa zvykne používať iná normalizácia.

$$G_l^{(\alpha)}(r, R; -k^2/u) = \frac{uk}{2\pi} (2kr)^l (2kR)^l e^{-k(r+R)}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{s!}{(s+l+1 - \frac{u\alpha}{2k})(s+2l+1)!} L_s^{2l+1}(2kr) L_s^{2l+1}(2kR) \quad (38)$$

Jednoduché odvođenje tohto vzťahu pre úplnosť uvádzam v Dodatku B.

S využitím coulombovskej Greenovej funkcie (38) je výpočet integrálu vo vzťahu (34) jednoduchý, i keď trochu zdĺhavý. Analogický postup ako pri tomto výpočte sa však bude v priebehu tejto práce opakovať viackrát; preto v Dodatku C urobím tento výpočet relatívne podrobne, so zahrnutím technických detailov. Výsledok som uviedol v štvrtej kapitole [vzťah (4.18)]

$$\frac{\Delta E_{nl}}{|E_{nl} = -k_n^2/u_g|} = \rho G^2 n^8 a_{nl}$$

teraz len dodám, že koeficienty  $a_{nl}$  sú dané vzťahom (Dodatok C a [33])

$$a_{nl} = \frac{2}{9n^3(2l+1)} \left\{ (l+1) [F(n, l) - F(-n, l)] + l [F(n, -l-1) - F(-n, -l-1)] \right\} \quad (39)$$

$$F(n, l) = 2n [n^2 - (l+1)^2] + (n+l+2)(n+l+1) \cdot \left[ \frac{(n-l)(n+l+3)}{9n+16} + \frac{4(2n-l)^2}{9n+8} \right] \quad (40)$$

Hodnoty niekoľkých koeficientov  $a_{nl}$  sú uvedené v Tabuľke 1.

#### 5.4. Dvojkanálový oscilátorový model

K. Zalewski [35] prednávknom navrhol jednoduchý model zovšeobecneného jednorozmerného harmonického oscilátora, na ktorom možno ilustrovať niektoré črty a protirečivé

Tabuľka 1 : Hodnoty niekoľkých koeficientov  $a_{n\ell}$  v LV vzťahu

$n \backslash \ell$	0	1	2	3	4
1	1,468	-	-	-	-
2	1,585	0,998	-	-	-
3	1,661	1,361	0,804	-	-
4	1,690	1,514	1,176	0,702	-
5	1,704	1,589	1,365	1,043	0,640

okamihy v teórii ťažkých kvarkónií. K pôvodu a vysvetleniu protirečení nemám komentár; použijem Zalewského model iba na osvetlenie problémov výpočtu energetických hladín ťažkého kvarkónia metódou, ktorú som opísal v odstavci 5.2.<sup>1)</sup>

Hamiltonián modelu je ( $m = 1$ )

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \sigma_3 - \lambda \omega^2 x^2 \sigma_1, \quad (41)$$

( $\sigma_1, \sigma_3$  sú Pauliho matice) a silne sa ponáša na hamiltonián kvarkónia, vzťah (7). Možno ho rozdeliť na "singletnú", "oktetnú" a interakčnú časť nasledujúcim spôsobom

$$H = H_1 + H_8 + H', \quad (42)$$

kde

$$H_1 = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_8 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

$h_{1,8}$  sú hamiltoniány jednorozmerných harmonických oscilátorov s frekvenciami  $\omega_{1,8}$  ( $\omega_8 > \omega_1$ )

<sup>1)</sup> Výsledky tejto časti sú obsiahnuté v článkoch [126, 127].

$$f_{1,8} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \omega_{1,8}^2 x^2$$

$$\omega_{1,8} = \sqrt{1 \mp \omega^2} \quad (44)$$

a

$$H' = \begin{pmatrix} 0 & -V \\ -V & 0 \end{pmatrix}, \quad V(x) = \lambda \omega^2 x^2 \quad (45)$$

$H'$  hrá úlohu "interakcie s kondenzátom", ktorá mieša "singletné" (horné) a "oktetné" (dolné) komponenty stavových vektorov.

Bez interakcie (keď  $\lambda = 0$ ) má hamiltonián  $H$  dve množiny vlastných funkcií:

i) "čisto singletné" vlnové funkcie

$$\phi_n^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \psi_n^{(\omega_1)}(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

ktorých vlastné energie sú

$$\epsilon_n^{(1)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega_1, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \text{ a} \quad (47)$$

ii) "čisto oktetné" vlnové funkcie

$$\phi_N^{(8)}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_N^{(\omega_8)}(x) \end{pmatrix} \quad (48)$$

s energiami

$$\epsilon_N^{(8)} = \left(N + \frac{1}{2}\right) \omega_8, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (49)$$

$\psi_n^{(\omega)}(x)$  sú normované vlnové funkcie jednorozmerného lineárneho harmonického oscilátora s frekvenciou  $\omega$  [123]:

$$\psi_n^{(\omega)}(x) = \left(\frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\right)^{1/2} H_n(\sqrt{\omega} x) e^{-\omega x^2/2} \quad (50)$$

$H_n(x)$  sú štandardné Hermiteove polynómy.

Po zapnutí interakcie sa v pôvodne "čisto singletných" ("čisto oktetných") stavoch objaví "oktetná" ("singletná") prímes. Presné vlastné funkcie a príslušné vlastné energie možno nájsť diagonalizáciou hamiltoniánu  $H$  [vzťah (41)]:

i) "singletné":

$$\phi_n^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \chi_n^{(\Omega_1)}(x) \cos \theta \\ \chi_n^{(\Omega_1)}(x) \sin \theta \end{pmatrix} \quad (51)$$

s energiami

$$E_n^{(1)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \Omega_1, \quad (52)$$

ii) "oktetné":

$$\phi_N^{(8)}(x) = \begin{pmatrix} -\chi_N^{(\Omega_8)}(x) \sin \theta \\ \chi_N^{(\Omega_8)}(x) \cos \theta \end{pmatrix} \quad (53)$$

s energiami

$$E_N^{(8)} = \left(N + \frac{1}{2}\right) \Omega_8. \quad (54)$$

Vo vzťahoch (51) až (54) je

$$\Omega_{1,8} = \left(1 \mp \omega^2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta}\right)^{1/2} \quad (55)$$

a

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2\lambda \quad (56)$$

Aby som preskúšal rozličné možnosti približného výpočtu "singletných" energetických hladín (52), vyriešim Zalewského model metódou, ktorá bola popísaná v odstavci 5.2.

Analógom kvarkóniovej Greenovej funkcie [vzťah (16)] je teraz "singletná" Greenova funkcia

$$G(E) \equiv P_1 (H - E)^{-1} P_1; \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (57)$$

pre ktorú možno rovnako ako v časti 5.2 odvodiť presnú rovnicu [cf. vzťah (23)]

$$G(E) = G_1(E) P_1 + G_1(E) K(E) G(E) \quad (58)$$

kde

$$G_1(E) \equiv (h_1 - E)^{-1} \quad (59)$$

$$K(E) \equiv P_1 V (h_8 - E)^{-1} V P_1 \quad (60)$$

"Singletné" energetické hladiny možno vypočítať vďaka vzťahu (58) riešením rovnice

$$\det [(E - \epsilon_n^{(1)}) \delta_{nm} + K_{nm}(E)] = 0, \quad (61)$$

v úplnej analógii so vzťahom (27). Treba však poznamenať, že na rozdiel od vzťahov (23) a (27), rovnice (58) a (61) v Zalewského modeli (v princípe) určujú presné riešenie; pri ich odvodení nie je potrebný žiaden dodatočný predpoklad analogický vzťahu (22).

V poslednom vzťahu  $K_{nm}$  je

$$K_{nm}(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \varphi_n^{(w_1)}(x) V(x) G_8(x, y; E) V(y) \varphi_m^{(w_2)}(y) \quad (62)$$

a

$$G_8(x, y; E) \equiv \langle x | (h_8 - E)^{-1} | y \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\varphi_N^{(w_2)}(x) \varphi_N^{(w_1)}(y)}{\epsilon_N^{(8)} - E}. \quad (63)$$

Pri riešení rovnice (61) sa treba vyrovnat' opäť s dvoma problémami, ktoré sú analogické tým, čo som uviedol v závere časti 5.2:

- (A) ako zredukovať nekonečný determinant;
- (B) ako aproximovať "oktetnú" Greenovu funkciu  $G_8$ , vzťah (63).

Aby som preskúmal závažnosť týchto problémov, vyskúšal som nasledujúce priblíženia:

(I) uvážiť iba najnižší (nultý) člen v  $G_8(x,y;E)$

a

(Ia) linearizovať rovnicu (61) pomocou  $K_{mn}(E) \approx \approx K_{nn}(\epsilon_n^{(1)}) \delta_{nm}$ ; vtedy

$$E_n^{(1)} = \epsilon_n^{(1)} - K_{nn}(\epsilon_n^{(1)}) \quad (64)$$

Toto priblíženie zodpovedá tomu, čo Leutwyler a Vološin spravili v teórii ťažkých kvarkónií (pozri časť 5.3 a obr. 7);

(Ib) spočítať pomocou neho  $K_{mn}(E)$  a vyriešiť rovnicu (61) pre determinant veľkosti  $N \times N$  (obr. 6a);

(II) zanedbať mimodiagonálne prvky  $K_{nm}$ , ale zobrať do úvahy viac ( $M \geq 2$ ) členov v "oktetnej" Greenovej funkcii  $G_8$  (viď obr. 6b); vtedy treba vyriešiť rovnicu

$$(E - \epsilon_n^{(1)}) + K_{nn}(E) = 0; \quad (65)$$

(III) zvážiť viac ( $M \geq 2$ ) členov v  $G_8(x,y;E)$  a riešiť rovnicu (61) s determinantom veľkosti  $N \times N$  (v skutočnosti som úlohu riešil pre  $N = 2$ ).

Uvedené priblíženia si vyžadujú znalosť niekoľkých najnižších maticových elementov operátora  $K(E)$ . Budem sa zaoberať len výpočtom energie "singletného" základného stavu v modeli; vystačím preto len s maticovými elementami  $K(E)$  s párnymi  $n$  a  $m$ . Kvôli parite vlnových funkcií má totiž matica  $K_{nm}$  tvar

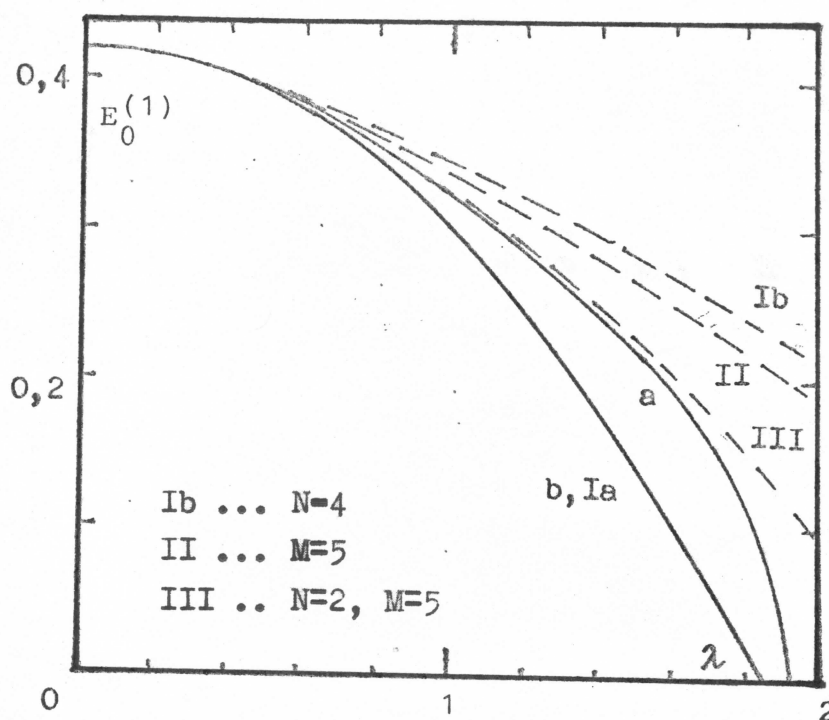
$$K_{nm} = \begin{bmatrix} K_{00} & 0 & K_{02} & 0 & \dots \\ 0 & K_{11} & 0 & K_{13} & \dots \\ K_{20} & 0 & K_{22} & 0 & \dots \\ 0 & K_{31} & 0 & K_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (66)$$

a párne a nepárne hladiny nie sú navzájom viazané. Potrebné

maticové elementy sú uvedené v Dodatku D.

Výsledky výpočtu energie základného stavu v Zalewského modeli sú zhrnuté na obr. 8 pre ilustračnú hodnotu frekvencie  $\omega = 0,5$ . Obrázok jasne napovedá nasledujúce skutočnosti:

1. "Leutwylerova-Vološinova" aproximácia (Ia) poskytuje relatívne presné výsledky len pre najmenšie hodnoty interakčného parametra  $\lambda$  (zlyháva pre väčšie  $\lambda$ ). V skutočnosti sa zhoduje s výsledkom, ktorý by sme dostali zo vzťahu (52), ak by sme  $E_0^{(1)}$  rozvinuli do mocnín  $\lambda$  a ponechali členy rádu  $\lambda^2$ .



Obrázok 8 : Energia singletného základného stavu v Zalewského modeli pri  $\omega = 0,5$

Plné čiary znázorňujú presnú energiu základného stavu (a) a jej rozvoj okolo  $\lambda = 0$  [do členov rádu  $\lambda^2$ ; (b)]. Čiarkované krivky zodpovedajú rôznym priblíženiam a sú označené Ia, Ib, II a III v zhode s textom [v skutočnosti (b) a Ia sa na obrázku zhodujú].



2. Ak zvyšujeme rád determinantu v rovnici (61), ale zanedbáme všetky vyššie členy "oktetnej" Greenovej funkcie  $G_8$  [priblíženie (1b)], tak sa zhoda s presným výsledkom podstatne nezlepšuje; ilustráciou je Tabuľka 2a.

3. Ak však uvážime niekoľko členov v Greenovej funkcii  $G_8$  [vzťah (63)], potom sa zhoda s presným riešením dramaticky zlepší aj bez zahrnutia mimodiagonálnych prvkov  $K(E)$ . Stačí zaradiť príspevky piatich členov v (63); ďalším zvyšovaním počtu členov sa hodnota  $E_0^{(1)}$  prestane blížiť k presnej hodnote (pozri Tabuľku 2b).

4. Započítanie niekoľkých málo členov v "oktetnej" Greenovej funkcii a zaratanie väzby základnej hladiny s najbližšou ďalšou singletnou hladinou dáva hodnotu energie základného stavu blízku presnej hodnote aj pre relatívne veľké hodnoty  $\lambda$ .

Na to, aby sme našli uspokojivú hodnotu energie základného stavu v modeli, potrebujeme teda nevyhnutne informácie o "oktetnom" sektore modelu. Väzba s vyššími "singletnými" stavmi hrá pri určovaní energetických hladín len relatívne malú úlohu.

Možné závery z uvedeného výsledku prediskutujem v nasledujúcej hlave.

Tabuľka 2 :

(a)		(b)	
Priblíženie Ib -- závislosť od veľkosti determinantu N		Priblíženie II -- závislosť od počtu členov M v $G_8$	
(pre $\omega = 0,5$ ; $\lambda = 1,0$ )			
N	$E_0^{(1)}$	M	$E_0^{(1)}$
1	0,3556	1	0,3556
2	0,3524	2	0,3422
3	0,3523	5	0,3418
6	0,3523	30	0,3418
presne	0,3320	presne	0,3320

#### HLAVA IV. SÚHRN VÝSLEDKOV, ZÍSKANÝCH POMOCOU NAVRHNUTEJ METÓDY, A JEJ OBMEDZENIA

V predchádzajúcej hlave (v 5. kap.) som opísal metódu na výpočet vplyvu vákuových kondenzátov v kvantovej chromodynamike na hodnoty energií ťažkých kvarkónií, ktorá bola navrhnutá v článku [119]. Východným bodom metódy je predpoklad, že charakteristické časopriestorové rozmery vákuových fluktuácií sú veľké v porovnaní s charakteristickými rozmermi kvark-antikvarkového viazaného stavu. Prirodzený postup potom vedie k rovnici (5.27), ktorej riešením sú energetické hladiny kvarkónia. Potrebný je iba jediný dodatočný predpoklad [vzťah (5.22)], ktorým sa zanedbáva vplyv singletných gluónových excitácií. Keďže však tento predpoklad neovplyvňuje možnosť "preskokov"  $Q\bar{Q}$  páru zo singletných do oktetných stavov (a späť), sprevádzaných preskokmi gluónového prostredia, verím, že neskreslí výsledný obraz interakcie  $Q\bar{Q}$  páru s vákuovým kondenzátom.

Navrhnutá metóda umožňuje systematický výpočet energetických hladín veľmi ťažkého kvarkónia. Jej prednosťou je, že umožňuje odhadnúť veľkosť korekcií, spôsobených efektmi, ktoré boli zanedbané v pôvodných analýzach Vološina [32] a Leutwylera [33]. Leutwylerovo-Vološinovo priblíženie je prirodzeným najnižším priblížením v rámci navrhnutej metódy (pozri časť 5.3).

Prednosti metódy ideálne ilustruje Zalewského model z časti 5.4. Samozrejme, pre malé hodnoty parametra  $\lambda$ , ktorý určuje silu interakcie medzi "singletnými" a "oktetnými" stavmi v modeli, analóg Leutwylerovho-Vološinovho priblíženia (i ďalšie približné metódy riešenia) poskytuje hodnotu energie základného stavu v súhlase s presným riešením. LV aproximácia zlyháva pre vyššie hodnoty  $\lambda$  a na uspokojivý výpočet energie základného stavu vtedy potrebujeme všeobecnejšiu metódu, ktorá umožňuje uvážiť vplyv "oktetných" stavov (vyšších členov v Greenovej

funkcii k hamiltoniánu  $H_0$ ) a vplyv väzby medzi základnou hladinou a vyššími "singletnými" hladinami. Takúto možnosť poskytuje metóda z predchádzajúcej hlavy.

Poučenia, vyplývajúce zo štúdia Zalewského modelu, sú zvlášť relevantné, ak je hodnota gluónového kondenzátu podstatne vyššia, ako určili rané analýzy [pozri (2.17), (2.19)]. Naznačili to niektoré nedávne práce a situácia sa nezdá byť úplne vyjasnená [128 - 134]. Pravda, priamy vzťah medzi parametrom  $\lambda$  v Zalewského modeli a hodnotou gluónového kondenzátu  $G^2$  neexistuje. Modelové výsledky však indikujú, že ak je hodnota  $G^2$  dosť veľká, korekcie k LV vzťahu (4.18) a ďalším podobným vzťahom nebudú zanedbateľné ani v prípade topónia a bude ich treba zobrať do úvahy (napr. za pomoci navrhnutej metódy).

V QCD veľmi potrebujeme realistický model vákua. Aby sa dali vypočítať korekcie k výsledkom Leutwylera a Vološina, potrebná je hlavne informácia o dynamike kvarkónia, keď sú jeho súčasti,  $Q\bar{Q}$  pár a gluónové prostredie, v oktetných stavoch. Až po doplnení podrobnejšími informáciami o vákuu QCD nájde navrhnutá metóda plné uplatnenie pri realistickom výpočte vlastností veľmi ťažkých kvarkónií.

Na záver pridám zopár poznámok, ktoré sa týkajú predpokladov navrhnutej metódy a jej obmedzení:

1. V multipólovom rozvoji (5.4) som ponechal, v súhlase s [32, 33], iba prvé dva členy. Možno očakávať, že príspevok nasledujúceho člena multipólového rozvoja bude voči predchádzajúcemu potlačený (analogicky ako v elektrodynamike) mocninou  $(r_{\text{char}}/R)^2$  [rádu 0,1 v prípade botomónia a 0,01 v prípade topónia]. Navyše bol zanedbaný magnetický dipólový člen voči elektrickému, lebo jeho príspevok je potlačený [33] štvorcem rýchlosti kvarku  $\sim \beta^2$  ( $\leq 0,1$  už pre šarmónium). Možno preto očakávať, že chyba zo zanedbania vyšších členov multipólového rozvoja neprevýši v prípade botomónia a topónia niekoľko percent.

2. Podobne ako u Leutwylera a Vološina, aj v našej metóde je zanedbaná konečná korelačná dĺžka vákuových kon-

denzátov (pozri [54, 101, 135, 136]). V úplne realistickom výpočte treba vplyv konečnej korelačnej dĺžky zobrať do úvahy. Nezarátanie jej vplyvu je jedným z možných vysvetlení, prečo najnižšie priblíženie, vzťah (4.18), je nepoužiteľné pre botomónium. Rozmer viazaného stavu ( $b\bar{b}$ ) a perióda pohybu konštituentov sú porovnateľné s korelačnou dĺžkou kondenzátu a rozvoj, ktorého prvým členom je (4.18), pochopiteľne stráca zmysel. Di Giacomo [54] uvádza jednoduchý odhad polomeru korelácie vo vákuovom kondenzáte. Výsledok je

$$R^{-2} \simeq -\frac{1}{2\pi^2} \frac{G_3}{G_2}, \quad (1)$$

čo s hodnotami (2.19) a (2.20) dáva

$$R \simeq 1 \text{ fm}. \quad (2)$$

Pomer Bohrovho polomeru najnižšieho  $Q\bar{Q}$  viazaného stavu k  $R$  je rádu (pozri Tab. 4.1)

$$r_1/R \simeq \begin{cases} 1 & \text{pre šarmónium,} \\ 0,4 & \text{pre botomónium,} \\ 0,06 \div 0,09 & \text{pre topónium,} \end{cases} \quad (3)$$

čo naznačuje, že vplyv korelačnej dĺžky kondenzátu na šarmóniá a botomóniá nemožno zanedbať, a istú úlohu zohrá aj v topóniu. Realistický výpočet tohto vplyvu zvažuje v súčasnosti skupina v Pise [137].

Hlava V. METÓDA SÚČTOVÝCH VZŤAHOV: VÝSLEDKY A POUČENIA, ZÍSKANÉ PRI JEJ POUŽITÍ NA VÝPOČET VLASTNOSTÍ TOPÓNÍÍ

Kapitola 6. ÚVOD DO CHROMODYNAMICKÝCH SÚČTOVÝCH VZŤAHOV

Súčtové vzťahy Šifmana, Vajnštejna a Zacharova [27] sú dnes bezpochyby najúspešnejším polofenomenologickým prístupom k výpočtu vlastností hadrónov. V porovnaní s inými fenomenologickými prístupmi (potenciálové modely, pozri kap. 3; "vrecové" modely; strunové modely a iné) je v nich zahrnuté pravdepodobne maximum informácií vyplývajúcich zo základných princípov QCD, ktoré možno využiť bez znalosti úplného riešenia teórie.

Cieľom chromodynamických súčtových vzťahov je nájsť parametre hadrónových rezonancií (napr. hmotnosti, väzbové konštanty, šírky rozpadu, magnetické momenty, atď.) zo znalosti parametrov, ktoré vystupujú v lagranžiáne QCD [pozri (1.1) až (1.4)]: väzbovej konštanty  $\alpha_s$  a hmotností kvarkov  $m_q$ , a parametrov, ktoré globálne charakterizujú vlastnosti vákua QCD (gluónový kondenzát, kvarkový kondenzát, ...).

Základná myšlienka ŠVZ spočíva v pokuse spojiť poruchové predpovede QCD, striktne platné v oblasti malých vzdialeností a umožnené asymptotickou voľnosťou teórie, s fyzikou veľkých vzdialeností, t. j. s vlastnosťami hadrónov. Mostom medzi oboma oblasťami sú disperzné vzťahy vyplývajúce zo všeobecných princípov analytičnosti a unitarity. Podrobnejšie rozvediem myšlienku súčtových vzťahov v časti 6.1.

Úspech súčtových vzťahov nemožno očakávať automaticky. Spoľahlivosť vypočítaných vlastností rezonancií nie je a priori zaistená, a závisí od existencie prekryvovej oblasti, v ktorej súčasne platia poruchové výrazy (modifikované neporuchovými efektami, ktoré sa parametrizujú cez kondenzáty) a zároveň sa disperzné vzťahy dajú saturovať

príspevkami najnižších rezonancií. Dá sa povedať, že práve úspechy súčtových vzťahov dokazujú existenciu prekryvovej oblasti; stručne sú vymenované v časti 6.2.

Základnou literatúrou o súčtových vzťahoch pred prácou [27] sú prehľady [138, 139], doslova učebnicou súčtových vzťahov sú originálne články [27]. Najnovšie prehľady prístupu sú obsiahnuté v [61, 63, 140 - 143].

### 6.1. Základné myšlienky súčtových vzťahov

Postup pri vytváraní súčtových vzťahov sa dá zhruba zhrnúť do nasledujúcich bodov:

1. Z kvarkových a gluónových polí sa skonštruuje zložený operátor (prúd)  $J(x)$  s rovnakými kvantovými číslami, aké nesú rezonancie, ktorých vlastností chceme vypočítať; napr. prúd

$$j^{\mu}(x) = : \frac{1}{2} [\bar{\psi}_u(x) \gamma^{\mu} \psi_u(x) - \bar{\psi}_d(x) \gamma^{\mu} \psi_d(x)] : \quad (1)$$

má izospin jedna a  $J^{PC} = 1^{--}$ , t. j. rovnaké kvantové čísla ako mezóny  $\rho, \rho', \dots$ ; prúd

$$j^{\mu}(x) = : \bar{\psi}_b(x) \gamma^{\mu} \psi_b(x) : \quad (2)$$

zodpovedá vektorovým stavom botómónia, atď.

2. Ústredným objektom ďalej je polarizačný operátor prúdu  $J(x)$  definovaný vzťahom

$$t \dots \pi_J(Q^2) \equiv i \int d^4x e^{iQx} \langle 0 | T [J(x) J(0)] | 0 \rangle, \quad (3)$$

kde  $Q^2 \equiv -q^2$ ,  $t \dots$  označuje lorentzovský tenzor, ktorého indexy a štruktúra súvisia s vlastnosťami prúdu  $J(x)$ , symbol  $T[\dots]$  označuje časové usporiadanie súčinu. Teoretický výraz pre polarizačný operátor umožňuje získať

a) Wilsonov rozvoj súčinov operátorov [144]<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Platnosť Wilsonovho rozvoja bola striktne dokázaná len v rámci poruchového rozvoja [145]; jeho použiteľnosť

$$i \int d^4x e^{iqx} T [J(x)J(0)] = \sum_i \frac{C_i(Q^2)}{(Q^2)^{d_i/2}} \hat{O}_i \quad (4)$$

kde  $C_i(Q^2)$  sú funkcie (Wilsonove koeficienty) argumentu  $Q^2$ ,  $\hat{O}_i$  sú lokálne operátory, skonštruované z kvarkových a gluónových polí, a  $d_i$  sú ich dimenzie ( $[\hat{O}_i] = (\text{hmotnosť})^{d_i}$ ). Operátory so spinom 0 najnižších dimenzií sú

$$\begin{aligned} I \text{ (jednotkový operátor)} & \dots\dots\dots d = 0, \\ m_i \bar{\psi}^{(i)} \psi^{(i)} \text{ (} i = u, d, \dots \text{)} & \dots\dots d = 4 \quad (5) \\ \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} & \dots\dots\dots d = 4, \text{ atď.} \end{aligned}$$

b) asymptotická voľnosť QCD: Vďaka nej možno spočítať Wilsonove koeficienty pre veľké  $Q^2$  poruchovo výpočtom zodpovedajúcich Feynmanových diagramov alebo metódou vonkajšieho poľa [151, 152].

Teoretický výpočet teda umožňuje vyjadriť pre dostatočne veľké  $Q^2$  polarizačný operátor (3) cez parametre lagranžiánu QCD a cez vákuové stredné hodnoty operátorov  $\hat{O}_i$  (kondenzáty):

$$\begin{aligned} \pi_J(Q^2) = C_I(Q^2) + \frac{1}{(Q^2)^2} \sum_i C_{\psi_i}(Q^2) \langle 0 | u_i \bar{\psi}^{(i)} \psi^{(i)} | 0 \rangle \\ + \frac{1}{(Q^2)^2} C_G(Q^2) \langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle + \dots \quad (6) \end{aligned}$$

3. Na druhej strane, imaginárna časť polarizačného operátora pre  $Q^2 > 0$  sa dá saturovať príspevkami rezonancií a kontínua nad prahom rozpadov rezonancií, povolených Zweigovým pravidlom. Väčšinou sa predpokladá zanedbateľná šírka rezonancií a  $\text{Im } \pi_J(q^2)$  sa reprezentuje v tvare

---

v teóriách s netriviálnym vákuom prediskutovali autori z ITEFu [146]. Nové diskusie a kontroverzie sa objavili nedávno [147 - 149]; odpovede na väčšinu otázok poskytuje článok [150].



$$\text{Im } \pi_J(s) = \sum_{\text{rezonancie}} \gamma_R \delta(s - m_R^2) + \text{kontínium} \quad (7)$$

kde  $\gamma_R$  sú konštanty.

4. Most medzi teoretickými a experimentálnymi predpo-  
vedami poskytuje disperzný vzťah

$$\pi_J(Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s+Q^2-i\epsilon} \text{Im } \pi_J(s) - \text{subtrakcie} \quad (8)$$

ktorý je dôsledkom analytických vlastností polarizačného operátora. Často je však výhodné používať tzv. vážené disperzné vzťahy, pričom váhovú funkciu  $w(s)$  volíme tak, aby sa zvýraznil príspevok zvolenej rezonancie (obyčajne základného stavu v danom kanáli) <sup>1)</sup>

$$F(Q^2, [w]) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds w(s) \text{Im } \pi_J(s) \quad (9)$$

pričom  $F$  sa spočíta pomocou  $\Pi$  a zadaného  $w$ .

V literatúre sa používajú váhové funkcie rôznych ty-  
pov; výsledkom sú tzv.

i) momentové súčtové vzťahy [138]

$$\left(-\frac{d}{dQ^2}\right)^N \pi_J(Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds \frac{N!}{(s+Q^2)^{N+1}} \text{Im } \pi_J(s) \quad (10)$$

[ $N$  sa vyberá väčšie ako počet potrebných subtraktív v (8)];

ii) lorentzovské súčtové vzťahy [154] typu:

$$f_J(s, \Delta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds' \frac{1}{(s'-s)^2 + \Delta^2} \text{Im } \pi_J(s'); \quad (11)$$

iii) konečnoenergetické súčtové vzťahy [155]

$$\Sigma_J(s_0, n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0} ds s^n \text{Im } \pi_J(s); \quad (12)$$

---

<sup>1)</sup> Váženými disperznými vzťahmi sa kedysi intenzívne za-  
oberali aj skupiny v Prahe a Bratislave (pozri monografiu  
[153]). V ich terminológii ŠVZ súčtové vzťahy sú vlastne  
testami analytičnosti.

iv) borelovské (laplaceovské) súčtové vzťahy [27]

$$F_J(M^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds e^{-s/M^2} \text{Im} \pi_J(s); \quad (13)$$

v) gaussovské súčtové vzťahy [156]

$$G_J(s_0, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^{\infty} ds \exp\left[-\frac{(s-s_0)^2}{4\tau}\right] \frac{1}{\pi} \text{Im} \pi_J(s); \quad (14)$$

a iné [157].

Vo všetkých uvedených vzťahoch ľavá strana sa spočíta transformáciou teoretického výrazu (6) [závislou od váhovej funkcie  $w$ ], pravá strana zasa dosadením rezonančných príspevkov v tvare (7). V istej oblasti hodnôt premenných v súčtových vzťahoch (detailne bola procedúra, akou sa nájde táto oblasť, popísaná v článku [134]) možno buď

(A) nájsť parametre lagranžiánu QCD a hodnoty kondenzátov zo známych vlastností rezonancií; alebo

(B) pomocou hodnôt väzbovej konštanty  $\alpha_s$ , hmotností kvarkov a veľkostí kondenzátov vypočítať predpovede charakteristík rezonancií.

## 6.2. Prehľad aplikácií súčtových vzťahov

Súčtové vzťahy boli aplikované skupinou v ITEFe a jej nasledovníkmi na výpočet impresívneho radu vlastností hadrónových rezonancií (pozri prehľady [142, 143]). Prvým veľkým triumfom bola predpoveď hmotnosti  $\eta_c$  častice v šarmóniovom systéme (pozri Tab. 3.1), ktorú pôvodne experimentátori nesprávne identifikovali a nakoniec našli presne s predpovedanou hmotnosťou.

Vymenujem najdôležitejšie skupiny častíc, ktorých vlastnosti boli počítané pomocou súčtových vzťahov:

1. mezóny zložené z ľahkých kvarkov [27, 158, 159];
2. šarmóniá [27, 160];
3. botomóniá [160 - 162];

4. mezóny zložené z jedného ľahkého a jedného ťažkého kvarku [163];
5. baryóny z ľahkých kvarkov [164 - 170];
6. baryóny s jedným ťažkým kvarkom [171];
7. exotické stavy [172, 173].

Nejdem tu vymenovávať po rade, v ktorých prípadoch je zhoda predpovedí súčtových vzťahov s experimentálnymi hodnotami kvantitatívna, a kde len kvalitatívna alebo nedostatočná. Presný výpočet vlastností niektorých stavov znemožňujú technické problémy; na iné sa metóda, zdá sa, vôbec nedá použiť (napr. výpočet vlastností radiálnych excitácií [140, 143]). Nazhromaždilo sa však už veľa materiálu (pozri citované články), ktoré dokazujú, že výpočet mnohých vlastností rezonancií so značnou presnosťou pomocou parametrov QCD a hodnôt kondenzátov je možný.

Ako zjavný neúspech súčtových vzťahov sa často označuje predpoveď hmotnosti  $2P$  stavov botomónia [162], ktorá je asi o 70 MeV nižšia ako v experimente (pozri Tab. 3.2). O botomóniu však platia niektoré skutočnosti, ktoré som uviedol v IV. hlave. Dôležitú úlohu hrajú vyššie poruchové (coulombovské) korekcie a stále ešte aj relativistické korekcie, čo možno spôsobuje spomínanú diskrepanciu [134]. Potrebná je podrobnejšia a rafinovanejšia analýza.

Ťažkosti so súčtovými vzťahmi v prípade veľmi ťažkých kvarkónií preilustrujú aj výsledky nasledujúcej kapitoly.

## Kapitola 7. TOPÓNIOVÉ SÚČTOVÉ VZŤAHY

Pri výpočte vplyvu gluónového kondenzátu na ťažké kvarkóniá (kap. 4 a 5) sme sa stretli s chromodynamickým analógom kvadratického Starkovho javu. Problém sme sa snažili riešiť priamym využitím vzťahov z nerelativistickej kvantovej mechaniky. Rovnaký výpočet (prinaajmenšom pre vlastnosti základného stavu kvarkónia) v princípe možno uskutočniť metódou chromodynamických súčtových vzťahov (kap. 6). Ako ukázala skupina v ITEFe [174], v nerelativistickej kvantovej mechanike výpočet vlastností základného stavu metódou súčtových vzťahov vedie k rovnakým výsledkom ako priama integrácia Schrödingerovej rovnice. Možno si teda predstaviť aj nasledujúci výpočet chromodynamického Starkovho javu: Najprv položíme  $G^2 = 0$  a vypočítame pomocou súčtového vzťahu hmotnosť  $M_0$  a šírku rozpadu  $\Gamma_0$  na  $e^+e^-$  pár pre základný stav, potom rovnaký výpočet zopakujeme pri  $G^2 \neq 0$ . Ako výsledok dostaneme

$$\begin{aligned} M(G^2) &= M_0 + \Delta M, \\ \Gamma(G^2) &= \Gamma_0 + \Delta\Gamma. \end{aligned} \quad (1)$$

Pri malých hodnotách  $G^2$  budú  $\Delta M$  a  $\Delta\Gamma$  úmerné  $G^2$  a mali by sme reprodukovat' vplyv chromodynamického kvadratického Starkovho javu.

Súčtové vzťahy takto poskytujú komplementárny pohľad na daný problém, a určite bude zaujímavé preskúmať, aká je presnosť tohto prístupu, aké sú jeho obmedzenia, kde sa objavujú rozdiely medzi oboma spomínanými prístupmi, atď.

Spomínal som však už, že ak chceme aplikovat' súčtové pravidlá na systavy veľmi ťažkých kvarkov (budem ďalej hovorit' o topóniách), potom narazíme na nevyhnutnosť započítat' vyššie poruchové korekcie vo Wilsonovom operátorovom rozvoji. Cestu, ako tieto tzv. coulombovské korekcie vypočítat', navrhol Vološin [161]. Popíšem ju v časti 7.1. Fyzikálny dôvod závažnosti poruchových korekcií sa dá ľahko

objaviť a sformulujem ho v termínoch potenciálového modelu: kvark-antikvarkový potenciál, motivovaný myšlienkami QCD, má približne tvar superpozície lineárneho uväzňujúceho potenciálu a coulombovského potenciálu. Charakteristický rozmer viazaných stavov kvarkov typu c a b leží v intervale vzdialeností, ktorý je neďaleko oblasti, v ktorej dominuje lineárny (nesingulárny) člen. Šarmóniá (a sčasti botomóniá) preto "necítia" coulombovskú singularitu pri  $r \rightarrow 0$  a príspevky vyšších poruchových rádov vo Wilsonových koeficientoch sú malé. Charakteristické rozmery topónií sa však očakávajú v oblasti, kde už dominuje coulombovský (singulárny) potenciál; preto sú coulombovské korekcie k súčtovým vzťahom veľké.

Výsledky použitia súčtových vzťahov pre topónium budú obsiahnuté v časti 7.2.

### 7.1. Výpočet coulombovských korekcií

Na určenie hmotnosti a šírky rozpadu na  $e^+e^-$  pár základného  $^3S_1$  stavu topónia použijem momentové súčtové vzťahy [pozri (6.10)]<sup>1)</sup> Pracovať budem s trocha modifikovanými momentami

$$M_n = (4m_t^2)^n \int \frac{R_t(s)}{s^{n+1}} ds, \quad (2)$$

pričom

$$R_t(s) = 12\pi Q_t^2 I_w \pi_t(s) \quad (3)$$

<sup>1)</sup> V momentových súčtových vzťahoch [pozri (6.10)] volíme  $Q^2 = 0$ . Môže sa zdať prekvapujúcim, že voliť  $Q^2 = 0$  postačuje na to, aby sme na teoretickej strane súčtových vzťahov mohli použiť poruchové výrazy. Vyššie poruchové korekcie sú však potlačené mocninami rádu  $\alpha_s (4m_q^2 + Q^2)$ , čo je pre ťažké kvarky malá veličina aj pri  $Q^2 = 0$ . Voľbou  $Q^2 \neq 0$  však v niektorých prípadoch môžeme zvýšiť spoľahlivosť hodnôt parametrov rezonancií, vypočítaných pomocou súčtových vzťahov [143].

a  $\Pi_t(s)$  je polarizačný operátor pre t-kvarky

$$(\not{q} \not{q} - \not{L}^2 \not{q}) \Pi_t(q^2) \equiv i \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T j_\mu(x) j_\nu(0) | 0 \rangle \quad (4)$$

a

$$j_\mu(x) = : \bar{\psi}_t(x) \gamma_\mu \psi_t(x) : \quad (5)$$

Veličina  $R_t(s)$  je fyzikálne merateľná; súvisí s účinným prierezom produkcie hadrónov s kvarkami typu t podľa vzťahu

$$R_t(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow (\text{hadrony})_t)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (6)$$

Príspevok (nekonečne) úzkeho vektorového topónia  $\xi$  k  $R_t(s)$  je [138]

$$R_t(s) \Big|_\xi = \frac{9\pi}{\alpha_{\text{QED}}^2} \Gamma_\xi M_\xi \delta(s - M_\xi^2), \quad (7)$$

kde  $M_\xi$  je jeho hmotnosť,  $\Gamma_\xi$  elektrónová rozpadová šírka a  $\alpha_{\text{QED}}$  je konštanta jemnej štruktúry. Príspevok k  $M_n$  je teda úmerný

$$M_n \Big|_\xi \sim \Gamma_\xi / M_\xi^{2n+1} \quad (8)$$

Spolahlivý výpočet parametrov základného stavu je možný len vtedy, keď príspevok základného stavu dominuje nad príspevkami vyšších stavov i kontína. Ako najjednoduchší odhad možno použiť napr. veličinu

$$\chi_n \equiv \frac{M_n \Big|_\xi - M_n \Big|_{\xi'}}{M_n \Big|_\xi} \quad (9)$$

pričom treba nájsť  $n$ , od ktorých je  $\chi_n$  blízke k 1.

Rovnaký odhad pre šarmónium pomocou experimentálnych údajov z Tabuľky 3.1 dáva

$$n_c \sim 7 \div 8, \quad (10a)$$

pre botomónium

$$n_b \sim 25 \div 30, \quad (10b)$$

kým na základe odhadov vlastností topónií v potenciálových

modeloch [175] možno čakať

$$n_t \sim 60 \div 160, \quad (10c)$$

bude teda treba použiť veľmi vysoké momenty polarizačného operátora.

Poruchové korekcie k Wilsonovým koeficientom v rozvoji súčinnov operátorov sú však pre  $n$ -tý moment radom v mocninách  $(\alpha_s \sqrt{n})$  (pozri ďalej). Pre veľké  $n$  preto treba spočítať všetky vedúce členy tohto radu!

Tento výpočet je možné uskutočniť [161], ak si uvedomíme, že polarizačný operátor  $\Pi_t(q^2)$  tesne pod prahom (pri  $q^2 = 4m_t^2 - 4k^2$ ,  $k^2 \ll m_t^2$ ) súvisí úzko s nerelativistickou kvarkóniovou Greenovou funkciou [vzťah (5.16)], a síce <sup>1)</sup>

$$\Pi_t(q^2) \Big|_{\substack{q^2 = 4m_t^2 - 4k^2 \\ k^2 \ll m_t^2}} = \frac{3}{2m_t^2} \lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow 0 \\ \vec{y} \rightarrow 0}} G_Q(\vec{x}, \vec{y}; -\frac{k^2}{m_t^2}) \quad (11)$$

(až na nepodstatnú, aj keď nekonečnú konštantu, ktorá nezávisí od  $k^2$ ).

Pre Greenovu funkciu  $G_Q(\vec{x}, \vec{y}; E)$  Vološin odvodil vzťah [32]

$$G_Q(\vec{x}, \vec{y}; E) = G_\beta(\vec{x}, \vec{y}; E) - \frac{\pi^2}{18} G^2 \int d^3\vec{r} d^3\vec{R} (\vec{r}, \vec{R}) G_\beta(\vec{x}, \vec{r}; E) G_\alpha(\vec{r}, \vec{R}; E) G_\beta(\vec{R}, \vec{y}; E) \quad (12)$$

pričom  $G_\alpha(\vec{r}, \vec{R}; E)$  je coulombovská Greenova funkcia [pozri Dodatok B a vzťah (5.38)] a  $\alpha = -d_s/6$ ,  $\beta = 4d_s/3$ .

Túto rovnicu ľahko nájdeme zo všeobecnejšej rovnice pre kvarkóniovú Greenovu funkciu, vzťah (5.23), ako prvú iteráciu, pričom sú navyše potrebné rovnaké úpravy ako tie, čo sme použili pri odvodení Leutwylerovho-Vološinovho vzťahu [medzi (5.28) a (5.33)]. Explicitný výpočet limity vo

<sup>1)</sup> Pozri Dodatok E, kde je naznačené odvodenie vzťahu (11).

vztahu (11) za pomoci výrazu (12) sa dá opäť uskutočniť pomocou Vološinovej reprezentácie coulombovskej Greenovej funkcie [vzťah (5.38), Dodatok B] a uvádzam ho v Dodatku F. Výsledok je

$$\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow 0 \\ \vec{y} \rightarrow 0}} G_Q(\vec{x}, \vec{y}; -\frac{k^2}{m_t}) = \frac{m_t}{2\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^2}{k - k_n} - \frac{\pi^2}{2} G^2 \frac{m_t^2}{k^5} \lambda^2 S(\lambda) \right\} \quad (13)$$

pričom  $k_n = 2m_t \alpha_s / 3n$  zodpovedá coulombovským viazaným stavom [cf. (4.9)],  $\lambda = 2m \alpha_s / 3k = k_1/k$  a

$$S(\lambda) \equiv \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(t+1)(t+2)(t+3)}{t+2+\lambda/8} \left[ \frac{\Gamma(t-\lambda)}{\Gamma(t+5-\lambda)} \right]^2 \quad (14)$$

Prvý člen vo výraze (13) je divergentný a treba ho starostlivo a opatrne regularizovať. Iná možnosť (a tej sa v ďalšom budem pridržať) je pracovať s týmto výrazom formálne, akoby bol konečný, a konzistentnosť formálnych operácií overiť a posteriori porovnaním so známymi výsledkami pre coulombovský problém.

Miesto  $G_Q(\vec{x}, \vec{y}; E)$  bude výhodné používať propagátor systému v euklidovskom čase  $\tau$ , definovaný vzťahom

$$K(\vec{x}, \vec{y}; \tau) \equiv \langle \vec{x} | e^{-H\tau} | \vec{y} \rangle. \quad (15)$$

Ak definujeme Laplaceovu transformáciu funkcie  $f(\tau)$  štandardným spôsobom

$$LT[f](E) \equiv \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-E\tau} d\tau, \quad (16)$$

potom Greenova funkcia  $G_Q$  je obrazom propagátora  $K$

$$G_Q(\vec{x}, \vec{y}; -E) = LT[K(\vec{x}, \vec{y}; \tau)] \quad (17)$$

resp.

$$K(\vec{x}, \vec{y}; \tau) = LT^{-1}[G_Q(\vec{x}, \vec{y}; -E)] \quad (18)$$



pričom  $LT^{-1}$  označuje inverznú Laplaceovu transformáciu. Inverzná Laplaceova transformácia úzko súvisí s borelovskou transformáciou, ktorá sa často používa na zlepšovanie konvergencie mocninných radov, a síce (symbolicky)

$$LT^{-1} = \frac{1}{\tau} \hat{B}, \quad (19)$$

pričom  $\hat{B}$  je definované ako

$$\hat{B}[f](\tau) \equiv \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ k^2 = n\mu_t/\tau}} \frac{(k^2)^n}{(n-1)!} \left(-\frac{d}{dk^2}\right)^n f(k^2). \quad (20)$$

Takto

$$K(\vec{x}, \vec{y}; \tau) = \frac{1}{\tau} \hat{B} \left[ G_Q(\vec{x}, \vec{y}; -\frac{k^2}{\mu_t}) \right]. \quad (21)$$

Na prechod od  $G_Q$  ku  $K$  budeme používať buď definíciu borelovskej transformácie (19) a špeciálne vzťah

$$\hat{B} [k^{-p}] = \frac{1}{\Gamma(p/2)} (\mu_t/\tau)^{-p/2} \quad (22)$$

alebo vzťahy pre inverznú Laplaceovu transformáciu, z ktorých najdôležitejšie zhrňa Dodatok G.

Pomocou vzťahu (13) po dosť zdĺhavom výpočte (Dodatok H) vychádza [162]

$$\begin{aligned} M(\tau) &\equiv \lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow 0 \\ \vec{y} \rightarrow 0}} K(\vec{x}, \vec{y}; \tau) = \\ &= M_0(\tau) \left[ \phi(\gamma) - \frac{\pi^2}{72} G^2 \frac{\tau^3}{\mu_t} \chi(\gamma) \right], \quad (23) \end{aligned}$$

pričom

$$\gamma = \frac{2}{3} \alpha_s \sqrt{\mu_t \tau} \quad (24)$$

budeme nazývať coulombovským parametrom, a funkcie  $\phi$ ,  $\chi$  sú dané výrazmi <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Vološin [161] uvádza ekvivalentný, no podstatne pomalšie konvergujúci výraz

$$\phi(\gamma) = 1 + 2\sqrt{\pi} \gamma + \frac{2\pi^2}{3} \gamma^2 + 4\sqrt{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{s}\right)^3 (1 + \operatorname{erf} \frac{\beta}{s}) \exp \frac{\beta^2}{s^2}.$$

$$\phi(\gamma) = 4\sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi(n)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \gamma^n \quad (25)$$

[ $\xi(n)$  je Riemannova dzeta-funkcia, pričom pre  $n = 0$ ,  $n = 1$  výrazy sú dodefinované vzťahmi  $\xi(0) = -\frac{1}{2}$ ,  $\lim_{n \rightarrow 1} \xi(n) / \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ],

$$\chi(\gamma) = 4\sqrt{\pi} \left( \sum_{t=0}^{\infty} (t+1)(t+2)(t+3) \right).$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1-\delta_{t0}}{9t+16} \left\{ \varphi_2\left(\frac{\gamma}{t}\right) - \varphi_1\left(\frac{\gamma}{t}\right) \left[ 1 + \frac{t}{12} \left( 25 - \frac{6}{9t+16} \right) \right] \right\} + \right. \\ & + \frac{16}{9t+17} \left\{ \varphi_2\left(\frac{\gamma}{t+1}\right) - \varphi_1\left(\frac{\gamma}{t+1}\right) \left[ 1 + \frac{t+1}{6} \left( 5 - \frac{3}{9t+17} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{4}{t+2} \left\{ \varphi_2\left(\frac{\gamma}{t+2}\right) - \frac{17}{18} \varphi_1\left(\frac{\gamma}{t+2}\right) \right\} + \\ & + \frac{16}{9t+19} \left\{ \varphi_2\left(\frac{\gamma}{t+3}\right) - \varphi_1\left(\frac{\gamma}{t+3}\right) \left[ 1 - \frac{t+3}{6} \left( 5 + \frac{3}{9t+19} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{9t+20} \left\{ \varphi_2\left(\frac{\gamma}{t+4}\right) - \varphi_1\left(\frac{\gamma}{t+4}\right) \left[ 1 - \frac{t+4}{12} \left( 25 + \frac{6}{9t+20} \right) \right] \right\} \Big] + \\ & + \frac{256}{9} \sum_{t=2}^{\infty} \frac{t^2-1}{(81t^2-1)^2(81t^2-4)^2} \varphi_1\left[ -\frac{\gamma}{8t} \right] \quad (26) \end{aligned}$$

pričom

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{x^3} \left[ e^{x^2} (1 + \operatorname{erf} x) - 1 \right] - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad (27)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{x} \left[ e^{x^2} (1 + \operatorname{erf} x) - 1 \right] - \varphi_1(x). \quad (28)$$

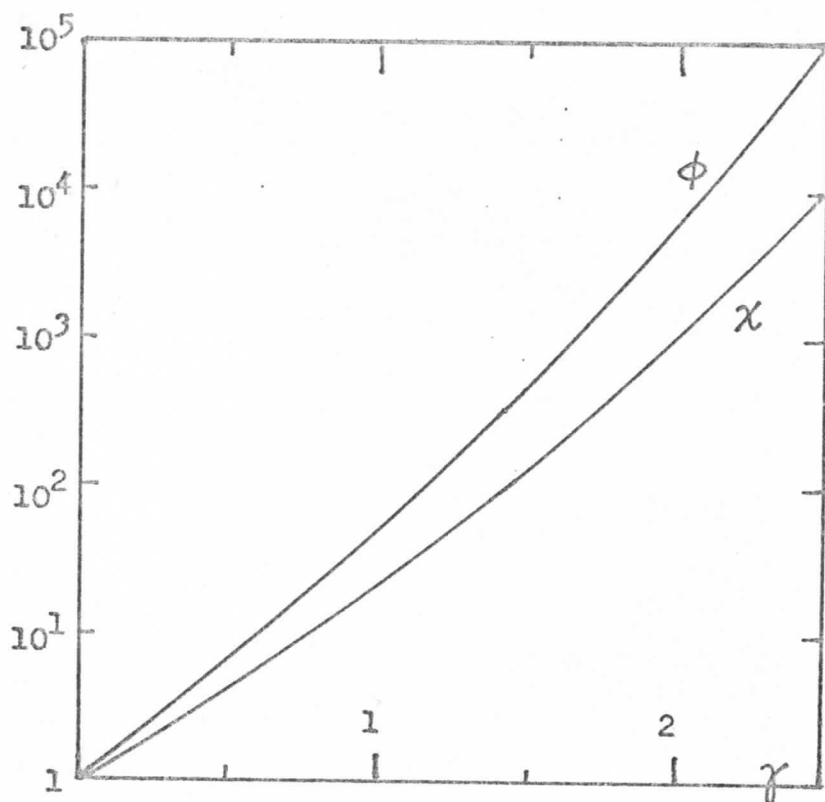
Výraz pre  $\phi(\gamma)$  a  $\chi(\gamma)$  odvodil pôvodne Vološin [161, 162], vzťah pre  $\chi(\gamma)$  (pozri rovnicu na str. 9 v [162]) však obsahoval niekoľko chýb, ktoré sú vo vzťahu (26) opravené.

Na číselné výpočty funkcií  $\phi(\gamma)$  a  $\chi(\gamma)$  sme použili

ich vyjadrenia vo forme mocninných radov

$$\begin{aligned}\phi(\gamma) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma^n, \\ \chi(\gamma) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \gamma^n,\end{aligned}\tag{29}$$

pričom  $a_n = 4\sqrt{\pi} \xi(n) / \Gamma(\frac{n-1}{2})$  a  $b_n$  sa dajú spočítať pomocou vzťahu (H.14). Hodnoty prvých dvadsiatich koeficientov  $a_n$ ,  $b_n$  udáva Tabuľka 1; grafy funkcií  $\phi(\gamma)$  a  $\chi(\gamma)$  obsahuje obr. 1. Hodnoty, relevantné pre topónium, sú  $\gamma \approx 2$ . Keďže napr.  $\phi(1) \doteq 49$  a  $\chi(1) \doteq 21$ ,  $\phi(2) \doteq 6257$  a  $\chi(2) \doteq 980$ , vidno, že coulombovské korekcie sú skutočne významné.



Obrázok 1 : Grafy funkcií  $\phi(\gamma)$  a  $\chi(\gamma)$ .

Niekoľko slov treba povedať o vyšších korekciách ku vzťahom (13) a (23). Vystupuje v nich väzbová konštanta  $\alpha_s$ , pričom sa nešpecifikuje bližšie škála charakteristických hybností, od ktorej závisí číselná hodnota väzbovej konštanty [pozri vzťah (1.7)]. Podrobnejšia analýza [161] ukazuje,

Tabuľka 1 : Koeficienty mocninného rozvoja funkcií  $\phi(\gamma)$   
a  $\chi(\gamma)$  [vztahy (29)]

n	$a_n$	$b_n$
0	1,000 000 ( 0) <sup>a</sup>	1,000 000 ( 0) <sup>a</sup>
1	3,544 908 ( 0)	2,727 917 ( 0)
2	6,579 736 ( 0)	3,984 326 ( 0)
3	8,522 362 ( 0)	4,133 847 ( 0)
4	8,658 586 ( 0)	3,415 039 ( 0)
5	7,351 626 ( 0)	2,388 872 ( 0)
6	5,425 830 ( 0)	1,469 885 ( 0)
7	3,574 505 ( 0)	8,161 323 (-1)
8	2,142 032 ( 0)	4,163 517 (-1)
9	1,184 009 ( 0)	1,977 523 (-1)
10	6,101 300 (-1)	8,832 096 (-2)
11	2,955 550 (-1)	3,737 771 (-2)
12	1,354 831 (-1)	1,507 927 (-2)
13	5,908 905 (-1)	5,827 141 (-3)
14	2,462 873 (-2)	2,165 402 (-3)
15	9,847 267 (-3)	7,763 084 (-4)
16	3,788 862 (-3)	2,692 289 (-4)
17	1,406 720 (-3)	9,053 228 (-5)
18	5,051 758 (-4)	2,957 622 (-5)
19	1,758 390 (-4)	9,403 527 (-6)
20	5,943 227 (-5)	2,914 125 (-6)

<sup>a</sup> Spôsob zápisu vysvetľuje príklad: 6,101 (-1) = 6,101 · 10<sup>-1</sup>,  
a pod.

že ako  $\alpha_s$  treba chápať vo vzťahu (13) hodnotu  $\alpha_s$  pre  $q \sim 2k$ , resp. vo vzťahu (23)  $\alpha_s$  na škále  $q \sim 2m_t/\sqrt{m_t\tau}$ . Vo vzťahu (13) potom máme započítané všetky členy úmerné  $[\alpha_s(2k)m_t/k]^n$ . Ukazuje sa, že možno spočítať aj členy úmerné  $\alpha_s(m_t) [\alpha_s(2k)m_t/k]^n$ ; treba vynásobiť pravú stranu vzťahu (13) resp. (23) faktorom

$$SK \equiv 1 - \frac{16}{3\pi} \alpha_s(m_t), \quad (24')$$

ktorý budem nazývať Schwingerovou korekciou, lebo ho možno nájsť zo známeho výsledku pre elektrodynamiku, ktorý odvodil Schwinger [181], zámenou  $\alpha_{\text{QED}} \rightarrow \frac{4}{3} \alpha_s(m_t)$ .

Vysvetlím teraz súvis funkcie  $M(\tau)$  so súčtovými vzťahmi. Pre polarizačný operátor  $\Pi_t$  [pozri vzťah (4)] môžeme napísať disperzný vzťah

$$\Pi_t(q^2) = \frac{q^2}{12\pi^2 Q_t^2} \int_0^\infty \frac{R_t(s)}{s(s-q^2)} ds. \quad (30)$$

Pri inverznej Laplaceovej transformácii

$$LT^{-1}[\Pi_t] = \frac{1}{48\pi^2 m_t Q_t^2} \int_0^\infty R_t(s) \exp\left[\frac{4m_t^2 - s}{4m_t^2} m_t \tau\right] ds, \quad (31)$$

odkiaľ vyplýva súčtový vzťah

$$M(\tau) = \frac{m_t}{72\pi^2 Q_t^2} \int_0^\infty R_t(s) \exp\left[\frac{4m_t^2 - s}{4m_t^2} m_t \tau\right] ds. \quad (32)$$

Ak teraz zvolíme  $\tau = \frac{n}{m_t}$ ,  $n \gg 1$ , a využijeme, že

$$\frac{(4m_t^2)^n}{s^{n+1}} = \frac{\tau}{4m_t n} \exp\left[-\frac{s - 4m_t^2}{4m_t^2} m_t \tau\right] \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad (33)$$

tak nájdeme

$$M_n = \frac{18\pi^2 Q_t^2}{m_t} M\left(\tau = \frac{n}{m_t}\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad (34)$$

pričom  $M_n$  boli definované vzťahom (3). Veličina  $M(\tau)$  teda pre veľké  $n$  úzko súvisí s konvenčnými momentami polarizačného operátora.

Ukázalo sa, že coulombovské korekcie k veličine  $M(\tau)$  sú mocninami coulombovského parametra  $\gamma = \frac{2}{3} \alpha_s \sqrt{m_t \tau}$ .  $M(\tau)$  je však pre  $m_t \tau = n$ ,  $n \gg 1$ , úmerné  $n$ -tému momentu  $M_n$ ; vidno teda, že poruchové korekcie v  $M_n$  sú mocninami  $\frac{2}{3} \alpha_s \sqrt{n}$ , ako som bol uviedol na začiatku tohto odstavca.

## 7.2. Určenie vlastností základného stavu topónia

Hmotnosť ( $M_\xi$ ) a elektrónový šírku rozpadu ( $\Gamma_\xi$ ) základného  $^3S_1$  stavu topónia (označujem ho  $\xi$  v súhlase s článkom Quigga a Rosnera [84], hoci sa rovnako označuje aj iná novoobjavená častica [67]) možno určiť napr. z dvoch po sebe nasledujúcich momentov  $M_n$  a  $M_{n+1}$ . Ak do vzťahu (2) dosadíme  $R_t(s)$  zo vzťahu (7) a zanedbáme príspevok vyšších rezonancií a kontína (to je možné len pre vysoké  $n$ ), tak dostaneme

$$M_n = \frac{9\pi}{\alpha_{QED}^2 (4m_t^2)} M_\xi \Gamma_\xi \left( \frac{4m_t^2}{M_\xi^2} \right)^{n+1} \quad (35)$$

Potom

$$M_\xi = 2m_t \sqrt{M_n / M_{n+1}}, \quad (36)$$

$$\Gamma_\xi = \frac{\alpha_{QED}^2}{9\pi} 2m_t M_n \left( \frac{M_n}{M_{n+1}} \right)^{n+\frac{1}{2}} \quad (37)$$

pričom za  $M_n$  možno dosadiť teoretický výraz (34) spolu s (23). Toto je asi najjednoduchší (a možno aj naivný) postup, ako odhadnúť  $M_\xi$  a  $\Gamma_\xi$  pomocou súčtových vzťahov.

Výsledky, získané pomocou vzťahov (36) a (37) zhrňajú obrázky 2 - 6.<sup>1)</sup> Konštantu jemnej štruktúry  $\alpha_s$  som zvolil tak, že jej hodnota na škále šarmónia je 0,2. Pri  $m_t = 40$  GeV/c<sup>2</sup> potom pomocou vzťahu (1.7) vychádza hodnota  $\alpha_s \sim 0,11$ . Na obr. 2 je znázornená korekcia k hmotnosti  $\xi$ , spôsobená

<sup>1)</sup> Predbežné výsledky tejto analýzy boli prednesené na konferencii Hadron Structure '83 v Smoleniciach [120].

gluónovým kondenzátom

$$\Delta M_{\xi} = M_{\xi}(G^2) - M_{\xi}(0), \quad (38)$$

na obr. 3 relatívna korekcia k jeho elektrónovej šírke rozpadu

$$\gamma = \frac{\Gamma_{\xi}(G^2) - \Gamma_{\xi}(0)}{\Gamma_{\xi}(0)} \quad (39)$$

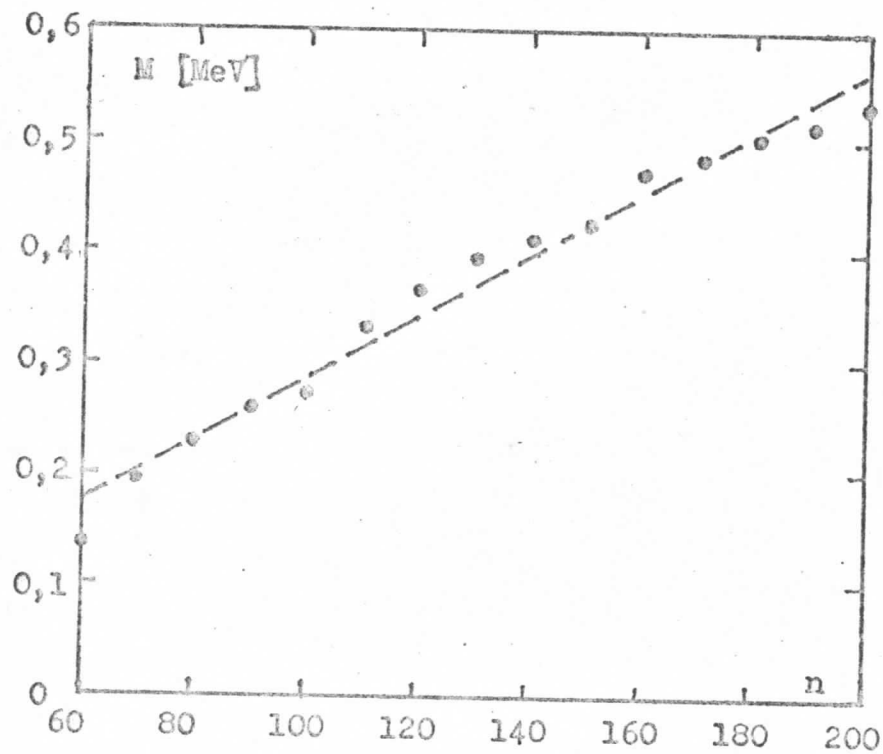
ako funkcia momentu  $n$  pri  $m_t = 40 \text{ GeV}/c^2$ . Neobjavuje sa žiadna oblasť stability hodnôt  $\Delta M_{\xi}$  a  $\gamma$ ; obe veličiny rastú pri raste  $n$ , ale ani pri  $n = 200$  nedosahujú hodnoty, ktoré predpovedajú Leutwyler a Vološin. (Ich predpoveď je  $\Delta M_{\xi} \doteq 6 \text{ MeV}/c^2$ , v predpovedi pre  $\gamma$  sa líšia, lebo ináč normalizujú kvarkóniovú vlnovú funkciu. Vološinov postup sa zdá správnym, a jeho predpoveď je pre  $m_t = 40 \text{ GeV}/c^2$   $\gamma \doteq 0,08$ .) To vidno jasne aj na obr. 4, v ktorom je znázornená relatívna zmena hmotnosti  $\xi$ -mezónu

$$\delta \equiv \frac{M_{\xi}(G^2) - M_{\xi}(0)}{2m_t - M_{\xi}(0)} \quad (40)$$

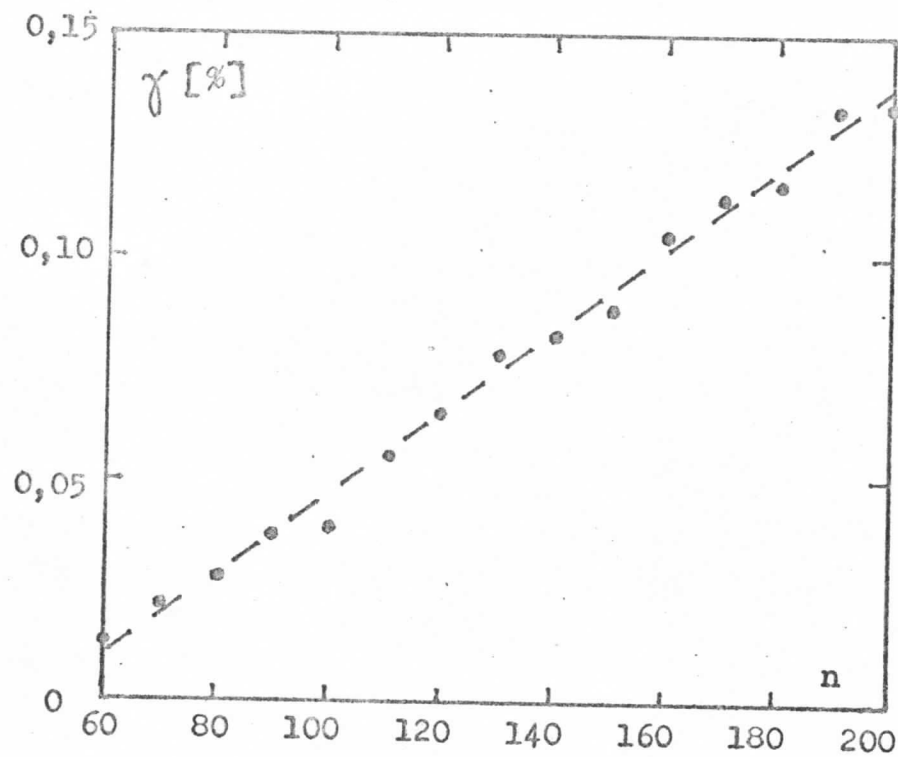
ako funkcia hodnoty gluónového kondenzátu  $G^2$  pre  $m_t = 40 \text{ GeV}/c^2$ , spočítaná z momentov s  $n = 70$ . (Túto hodnotu  $n$  som vybral preto, lebo pre ňu vychádza vypočítaná hodnota  $M_{\xi}(0)$  zhruba rovnaká ako očakávaná hodnota  $M_{\xi}(0) = 2m_t - \beta m_t^2/4$ .) Hoci korekcia podľa očakávania rastie lineárne s  $G^2$ , smernica je takmer 30-krát menšia (pri  $G^2 = 0,45 \text{ GeV}^4$  je len 35%, hoci by mala byť viac než 100%-ná). Podobnú skutočnosť pozorujeme v správaní  $\gamma$  ako funkcie  $G^2$  (obr. 5).

Zaujímavé je pozrieť sa podrobnejšie na závislosť korekcie k hmotnosti  $\xi$  od hmotnosti a väzbovej konštanty. Na obr. 6 je znázornená závislosť veličiny

$$\omega \equiv \frac{M_{\xi}(G^2) - M_{\xi}(0)}{2m_t - M_{\xi}(0)} m_t^4 [\alpha_s(m_t)]^6 \quad (41)$$

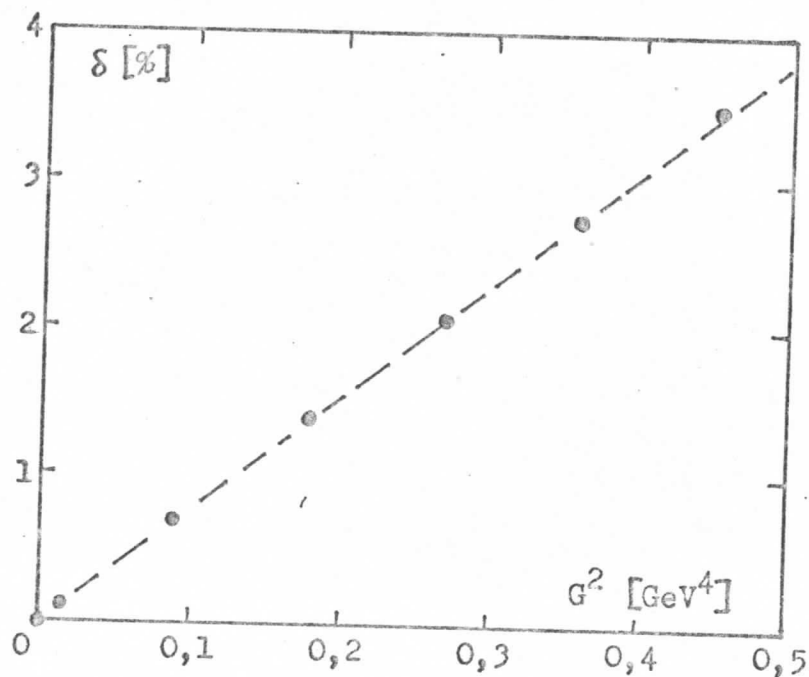


Obrázok 2 : Korekcia k hmotnosti  $\xi$  ako funkcia  $n$   
 pre  $m_t = 40 \text{ GeV}$  a  $G^2 = 0,012 \text{ GeV}^4$ . Prerušovaná  
 čiara predstavuje lineárny fit.



Obrázok 3 : Relatívna zmena elektrónovej šírky rozpadu  $\xi$   
ako funkcia  $n$  pre  $m_t = 40 \text{ GeV}$  a  $G^2 = 0,012 \text{ GeV}^4$ .  
 Prerušovaná čiara predstavuje lineárny fit.

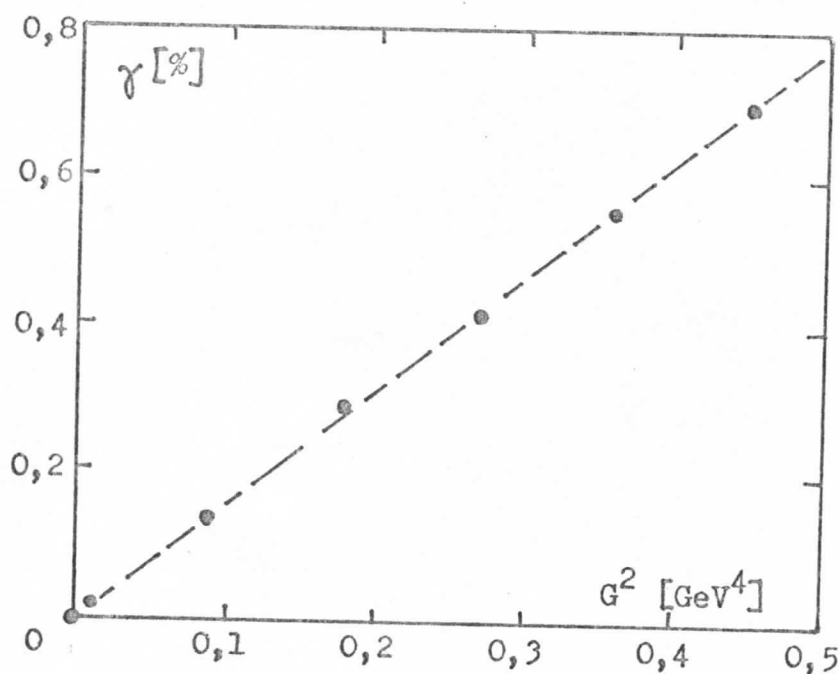




Obrázok 4 : Relatívna zmena hmotnosti  $\xi$ -mezónu ako funkcia gluónového kondenzátu  $G^2$  (pre  $m_t = 40$  GeV).

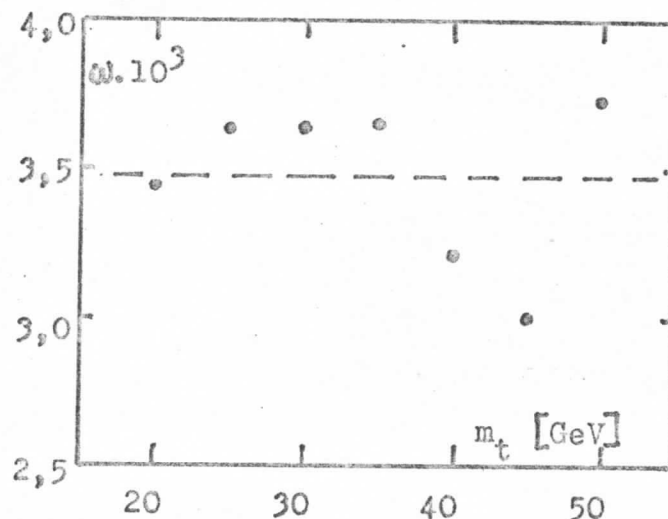
Prerušovaná čiara predstavuje fit:

$$\delta \doteq 7,715 G^2 + 0,002.$$



Obrázok 5 : Relatívna zmena elektrónovej šírky rozpadu  $\xi$  ako funkcia  $G^2$  (pre  $m_t = 40$  GeV). Prerušovaná

čiara predstavuje fit:  $\gamma \doteq 1,544 G^2 + 0,002.$



Obrázok 6 : Hodnota  $\omega = \delta m^4 [\alpha_s(m)]^6$  ako funkcia hmotnosti t-kvarku  $m_t$  pri  $G^2 = 0,012 \text{ GeV}^4$

od hmotnosti t-kvarku  $m_t$  pri  $G^2 = 0,012 \text{ GeV}^4$ . Podľa vzťahu (4.18) by malo byť  $\omega$  konštantné, nezávislé od  $m_t$ . Obrázok 6 prezrádza, že hoci hodnota  $\omega$  je podstatne menšia, ako predpovedajú Vološin a Leutwyler ( $\sim 0,124$ ), je približne konštantná (s odchýlkami menšími ako 15%).

Metóda súčtových vzťahov v najjednoduchšej forme teda nereprodukuje výsledky Leutwylera a Vološina. Hodnoty korekcií k hmotnosti a elektrónovej šírke rozpadu základného stavu topónia, ktoré vyplývajú zo súčtových vzťahov v tej forme, v akej som ich použil v tejto kapitole, sú pri najmenšom o rád menšie ako očakávané hodnoty. Napriek tomu sa ukazuje, že korekcie naozaj závisia od jediného parametra  $\sim G^2 / m_t^4 [\alpha_s(m)]^6$ , v zhode so vzťahom (4.18).

Neúspech súčtových vzťahov pri ich použití na predpoveď vlastností topónií pripisujem osobitostiam, ktoré sa objavujú v dôsledku veľkej hmotnosti t-kvarkov. Tieto osobitosti sa čiastočne prejavili už pri analýze botomónia a viedli k protirečivým výsledkom, ak neboli starostlivo zvážené (pozri napr. citované články [128, 129, 131 a 134]). V predkladanej analýze som jednu osobitosť súč-

tových vzťahov pre systémy ťažkých kvarkov a antikvarkov -  
 - závažnosť coulombovských korekcií - zobral do úvahy.  
 Zahrnul som však len vedúce korekcie, a úplne som zaned-  
 bal príspevok kontínua. Je možné, že sa tieto zjednoduše-  
 nia významne prejavili na získaných výsledkoch.

Aby som osvetlil problémy súčtových vzťahov v topó-  
 niu a našiel príčiny, ktoré viedli k protirečivým výsled-  
 kom, preskúmam touto metódou v nasledujúcej kapitole dva  
 známe kvantovomechanické problémy.

### Kapitola 8: SÚČTOVÉ VZŤAHY PRE JEDNODUCHÉ SÚSTAVY VO VONKAJŠOM POLI

V kvantovej mechanike sa už neraz podarilo nájsť jed-  
 noduché situácie, ktoré poslúžili na ilustráciu problémov  
 v kvantovej teórii poľa a fyzike vysokých energií a viac  
 ráz poskytli aj návod na ich riešenie. Po príklad netreba  
 zájsť ďaleko: v piatej kapitole som použil jednoduchý pres-  
 ne riešiteľný model dvojkanálového harmonického oscilátora  
 na ilustráciu problémov výpočtu vplyvu vákuových kondenzá-  
 tov na ťažké kvarkóniá. V predchádzajúcej kapitole som sa  
 tento výpočet pokúsil uskutočniť metódou súčtových vzťahov,  
 a dospel som k protirečivým výsledkom. Študoval som pritom  
 vlastne súčtové vzťahy pre ťažký kvark-antikvarkový pár v  
 (akoby) vonkajšom gluónovom poli.

V tejto kapitole sa pokúsim osvetliť niektoré problé-  
 my súčtových vzťahov pre systémy vo vonkajšom poli v dvoch  
 (relatívne) jednoduchých situáciách: v prípade lineárneho  
 harmonického oscilátora (LHO) v konštantnom vonkajšom elek-  
 trickom poli a v prípade Starkovho javu v atóme vodíka.  
 LHO pritom bude slúžiť ako príklad sústavy viazanej inter-  
 akčným potenciálom, ktorý nie je singulárny v počiatku  
 (okolo  $r = 0$ ), kým atóm vodíka ako príklad sústavy viaza-  
 nej singulárnym potenciálom. Druhý príklad bude teda veľ-  
 mi blízky situácii, s ktorou sme sa stretli v predchádza-

júcej kapitole. Navyše, Starkov jav v atóme vodíka pre silné polia je dodnes zaujímavým teoretickým problémom, ako o tom svedčia práce [182, 183] a v nich citovaná literatúra. Rôzne približné metódy riešenia [182, 184, 185] totiž poskytujú rovnaké výsledky pre slabé polia, ale podstatne odlišné pre silné polia.

Výsledky, uvedené v tejto kapitole, vznikli v spolupráci s Ivom Novákom [186].

### 8.1. Súčtové vzťahy ŠVZ v kvantovej mechanike

Metóda súčtových vzťahov sa dá použiť na výpočet energie základného stavu v kvantovomechanických problémoch nasledujúcim spôsobom [174, 134, 143]:

Ústredným objektom je euklidovská Greenova funkcia (propagátor)

$$M(\tau) \equiv G(\vec{0}, -i\tau; \vec{0}, 0) \quad (1)$$

pričom <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} G(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) &\equiv \langle \vec{x}_2 | e^{-iH(t_2-t_1)} | \vec{x}_1 \rangle = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\vec{x}_2) \varphi_k^*(\vec{x}_1) e^{-iE_k(t_2-t_1)} \end{aligned} \quad (2)$$

je Greenova funkcia od času závislej Schrödingerovej rovnice.  $M(\tau)$  je analogické výsledku borelovskej (inverznej laplaceovskej) transformácie polarizačného operátora, ktorý hrá ústrednú úlohu v chromodynamických súčtových vzťahoch (pozri kap. 6).

Súčtový vzťah pre  $M(\tau)$  vyplýva z rovnice

$$M(\tau) = |\varphi_0(\vec{0})|^2 e^{-E_0\tau} + M_c(\tau). \quad (3)$$

---

<sup>1)</sup> Súčet na pravej strane predstavuje súčet cez diskkrétne vlastné stavy a integrál cez stavy kontínua (rozptylové stavy).

Tento vzťah porovnáva poruchový výraz pre euklidovskú Greenovu funkciu na ľavej strane s jej vyjadrením cez "fyzikálne" parametre  $|\varphi_k(\vec{0})|^2$  a  $E_k$ .  $M_c(\tau)$  označuje príspevok vyšších stavov nad základným stavom

$$M_c(\tau) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(\vec{0})|^2 e^{-E_k \tau} \quad (4)$$

a budem ho nazývať príspevkom kontínua, analogicky ako v chromodynamických súčtových vzťahoch. Príspevok kontínua sa zvykne aproximovať nejakou jednoduchou funkciou, ktorá závisí od jediného voľného parametra, ktorý budem nazývať prahom kontínua  $E_c$  (podrobnejšie pozri ďalej).

Poruchový výraz  $M_{\text{pert}}(\tau)$ , ktorý dosadzujeme na ľavej strane rovnice (3) miesto  $M(\tau)$ , obyčajne obsahuje len niekoľko prvých členov Bornovho radu pre euklidovskú Greenovu funkciu. Je preto dobrým priblížením k presnému  $M(\tau)$  len pre dostatočne malé euklidovské časy ( $\tau < \tau_B$ ).

Naopak, na jednoznačné určenie charakteristík základného stavu,  $|\varphi_0(\vec{0})|^2$  a  $E_0$ , musí byť jeho príspevok do  $M(\tau)$  na pravej strane rovnice (3) dominantný. Taká je situácia pre veľké euklidovské časy ( $\tau > \tau_c$ ), kedy je "kontínium" exponenciálne potlačené. <sup>1)</sup>

Možno očakávať, že súčtový vzťah poskytne dostatočne presné hodnoty  $|\varphi_0(\vec{0})|^2$  a  $E_0$  iba vtedy, ak existuje taká oblasť euklidovských časov  $\tau$  (tzv. oblasť spoľahlivosti [134]), v ktorej tak  $M_{\text{pert}}(\tau)$ , ako aj pravá strana rovnice (3) sú dobrými priblíženiami k presnému  $M(\tau)$ . Podmienkou samozrejme je  $\tau_c < \tau_B$ .

V oblasti spoľahlivosti možno energiu určiť napr. zo vzťahu

$$E_0 = -\frac{d}{d\tau} \ln [M_{\text{pert}}(\tau) - M_c(\tau)]. \quad (5)$$

<sup>1)</sup> Samozrejme, predpokladá sa energetická medzera medzi základným a vyššími stavmi.

Nie je od počiatku a v každom probléme zřejmé, či existuje oblasť spoľahlivosti  $\tau_c < \tau < \tau_B$ . Rôzni autori však našli príklady, pre ktoré oblasť spoľahlivosti skutočne existuje a umožňuje tak spoľahlivý odhad energie základného stavu [134, 174, 187].

## 8.2. Jednorozmerný LHO v elektrickom poli

Prvým problémom, ktorým preilustrujem aspekty metódy súčtových vzťahov, je jednorozmerný lineárny harmonický oscilátor v konštantnom homogénnom vonkajšom elektrickom poli. Presné vlastné hodnoty jeho hamiltoniánu

$$H = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - eEx \quad (6)$$

(elektrické pole má smer osi  $x$  a veľkosť  $E$ ) sú

$$E_k = \left(k + \frac{1}{2} - \epsilon\right)\omega; \quad \epsilon = \frac{(eE)^2}{2m\omega^3}; \quad k=0,1,2,\dots \quad (7)$$

a zodpovedajúce vlastné funkcie sú

$$\phi_k(x) = \psi_k^{(\omega)}(x-x_0); \quad x_0 = \frac{eE}{m\omega^2} \quad (8)$$

pričom  $\psi_k^{(\omega)}(x)$  sú vlastné funkcie LHO bez poľa (pozri [123] alebo (5.50), kde však  $m = 1$ ).

Euklidovská Greenova funkcia problému je podľa vzťahov (1) a (2)

$$M(\tau) = e^{\epsilon\omega\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^{(\omega)}(-x_0) \psi_k^{(\omega)*}(-x_0) e^{-\omega\tau(k+\frac{1}{2})} \quad (9)$$

alebo

$$M(\tau) = e^{\epsilon\omega\tau} G_{LHO}(-x_0, -i\tau; -x_0, 0) \quad (10)$$

kde  $G_{LHO}(x_2, t_2; x_1, t_1)$  je Greenova funkcia LHO bez poľa. Pre ňu je známy presný výraz (kap. 3 monografie [49])

$$G_{LHO}(x_2, t_2; x_1, t_1) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i \sin\omega T}\right)^{1/2} \exp(iS_{cl}), \quad (11)$$

pričom  $T = t_2 - t_1$  a

$$S_{cl} = \frac{m\omega}{2 \sin \omega T} [(x_1^2 + x_2^2) \cos \omega T - 2x_1 x_2]. \quad (12)$$

Presný výraz pre  $M(\tau)$  teda je

$$M(\tau) = \left( \frac{m\omega}{2\pi \sin \omega \tau} \right)^{1/2} \exp \left[ \epsilon \omega \tau \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2} \right) \right]. \quad (13)$$

V ďalšom však budem predstierať neznalosť presného výsledku (13), aby som sa čo najviac priblížil situácii v teórii poľa, kde sa obyčajne ťažko dá spočítať viac než niekoľko prvých členov poruchového radu. Prvé dva členy Bornovho radu pre euklidovskú Greenovu funkciu  $M(\tau)$  s poruchou

$$V(x) = + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - e E x \quad (14)$$

dávajú

$$M_{\text{pert}}(\tau) = M_0(\tau) \left[ 1 - \frac{(\omega \tau)^2}{12} + \epsilon \frac{(\omega \tau)^3}{12} + \frac{(\omega \tau)^4}{160} \right] \quad (15)$$

(pozri Dodatok I), čo, prirodzene, súhlasí s rozvojom presného  $M(\tau)$  [vzťah (13)] do mocnín  $\tau$  a  $\epsilon$ .  $M_0(\tau)$  je euklidovská Greenova funkcia pre voľnú časticu, ktorá je daná vzťahom

$$M_0(\tau) = \left( \frac{m}{2\pi\tau} \right)^{1/2}. \quad (16)$$

Najnižší príspevok od elektrického poľa teda je

$$\Delta M_{\text{pert}}(\tau) = M_0(\tau) \epsilon \frac{(\omega \tau)^3}{12}. \quad (17)$$

Pre príspevok kontínua vo vzťahu (3) skupina v ITEFe [134] (pozri aj Dodatok B v článku [187]) pre nesingulárne potenciály navrhuje tzv. priblíženie voľného pohybu. Greenovu funkciu  $M_0(\tau)$  [vzťah (16)] možno zapísať v tvare

$$M_0(\tau) = \int_0^{\infty} dE e^{-E\tau} \varphi_0(E), \quad (18)$$

pričom

$$\rho_0(E) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{u}{2E}}. \quad (19)$$

Priblíženie voľného pohybu spočíva v nahradení príspevku presného kontínua príspevkom kontínua voľných častíc, ktoré však začína od prahu kontínua  $E_c$ , t. j.

$$M_c(\tau) \approx M_c^{(0)}(\tau; E_c) = \int_{E_c}^{\infty} dE e^{-E\tau} \rho_0(E). \quad (20)$$

Celá informácia o interakcii sa tak zahrňa do voľného parametra  $E_c$ , ktorého hodnotu treba určiť spolu s hodnotami charakteristík základného stavu.

Ďalej je treba bližšie špecifikovať kritériá, ktoré určujú oblasť spoľahlivosti súčtového vzťahu (3). Budeme postupovať podľa procedúry v článku [134]. Dolná hranica  $\tau_c$  vyplýva z požiadavky, aby bol príspevok kontínua menší ako 30% príspevku základného stavu do pravej strany rovnice (3). Hornú hranicu  $\tau_B$  nájdeme tak, že žiadame, aby vedúca bornovská korekcia v  $M_{\text{pert}}(\tau)$  bola menšia ako 30% príspevku euklidovskej Greenovej funkcie pre voľnú časticu.

Ak  $\tau_c < \tau_B$ , oblasť spoľahlivosti existuje a energiu základného stavu možno nájsť zo vzťahu

$$E_0(\tau) = -\frac{d}{d\tau} \ln [M_{\text{pert}}(\tau) - M_c^{(0)}(\tau; E_c)]. \quad (21)$$

Hodnota prahu kontínua  $E_c$  sa ladí dovedy, kým nie je hodnota  $E_0$  približne konštantná v oblasti spoľahlivosti, t. j. pre  $\tau \in (\tau_c, \tau_B)$ . Táto konštanta sa potom vyhlási za približnú hodnotu energie základného stavu.

Výsledky pre energiu základného stavu LHO v elektrickom poli, ktoré sme získali [186] pomocou vzťahu (21), zhrňa Tabuľka 1. Pri nulovom vonkajšom poli sme našli energiu základného stavu LHO  $0,4 \omega$  (namiesto presnej hodnoty  $0,5 \omega$ ). Obe hodnoty súhlasia v rámci očakávanej presnosti metódy [134]. S popísanými kritériami pre  $\tau_c, \tau_B$  oblasť



Tabuľka 1 : Energia základného stavu LHO vo vonkajšom elektrickom poli, získaná pomocou súčtového vzťahu pre úplnú euklidovskú Greenovu funkciu [vzťah (21)]

$\epsilon$	$E_c/\omega$	$E_0/\omega$	$\Delta E_0/\omega$	$\Delta E_0/\omega$ (presné)
0,00	0,90	0,405	-	0
0,01	0,81	0,387	-0,018	-0,01
0,02	0,72	0,368	-0,037	-0,02
0,03	0,63	0,349	-0,056	-0,03

spoľahlivosti existovala pre polia, zodpovedajúce  $\epsilon \leq 0,03$ . Pre tieto polia bola korekcia k energii základného stavu

$$\Delta E_0 \simeq -1,8 \omega \epsilon, \quad (22)$$

čo sa o 80% líši od presnej hodnoty  $-\omega \epsilon$ , čo je neuspokojujúce.

Pôvod neuspokojivého výsledku (22) možno pripísať dvom zdrojom chýb:

1. Korekcia  $\Delta E_0$ , spôsobená polom, sa počítala tak, že sme najprv pomocou súčtových vzťahov určili energiu základného stavu bez poľa ( $\epsilon = 0$ ) a potom s polom ( $\epsilon \neq 0$ ).  $\Delta E_0$  sa určilo ako rozdiel  $E_0(\epsilon) - E_0(\epsilon = 0)$ , čo je numericke nebezpečný postup, lebo sa na výpočet malej korekcie používa rozdiel veľkých čísel.

2. Je možné, že treba uvážiť väčší počet členov Bornovho radu a realistickejšie priblíženie pre kontínium.

V prípade LHO sa podstatným ukázal hlavne prvý zdroj chýb. Aby sme sa vyhli tomuto problému, môžeme napísať súčtový vzťah pre korekciu ku euklidovskej Greenovej funkcii, spôsobenú polom, a nie pre celú Greenovu funkciu. Ak odčítame súčtové pravidlo pre prípad s poruchou a bez poruchy, ľahko nájdeme

$$\Delta E_0 = -\frac{d}{dt} \ln \left\{ 1 + \frac{\Delta M_{\text{pert}}(\tau) - \Delta M_c(\tau)}{|z_0(0)|^2 e^{-E_0 \tau}} \right\} \quad (23)$$

kde

$$\begin{aligned} \Delta M_{\text{pert}}(\tau) &= M'_{\text{pert}}(\tau) - M_{\text{pert}}(\tau), \\ \Delta M_c(\tau) &= M'_c(\tau) - M_c(\tau), \end{aligned} \quad (24)$$

pričom čiarkované (nečiarkované) veličiny sa vzťahujú teraz na prípad s nenulovým (nulovým) poľom.  $\Delta M_{\text{pert}}(\tau)$  je zrejme v najnižšom priblížení dané vzťahom (17).

Pre príspevok kontínua možno opäť dosadiť priblíženie voľného pohybu

$$\Delta M_c(\tau) \approx \Delta M_c(\tau; E'_c, E_c) = M_c^{(0)}(\tau; E'_c) - M_c^{(0)}(\tau; E_c), \quad (25)$$

pričom prah kontínua bez poľa je  $E_c \doteq 1,5\omega$ <sup>1)</sup> a  $E'_c$  je prah kontínua pri nenulovom poli. Ten sa pre dané  $E$  nájde z požiadavky, aby  $\Delta E_0$  [vzťah (23)] bolo približne konštantné v oblasti spoľahlivosti, ktorá je určená rovnakými kritériami ako prv.

Výsledky, ktoré sme získali pomocou vzťahu (23), zhrňa Tabuľka 2 a obr. 1. Oblať spoľahlivosti a stabilná hodnota  $\Delta E_0$  existovali pri  $\epsilon \lesssim 0,05$ . Posun energetickej hladiny základného stavu je približne

$$E_0 = - (1,1 \div 1,2) \epsilon \omega, \quad (26)$$

čo sa od presnej hodnoty líši už len o  $\lesssim 20\%$ .

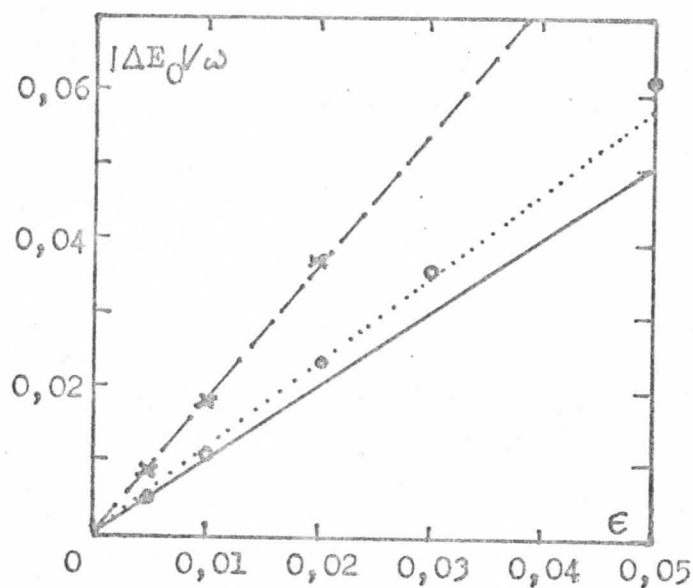
Ďalšie zvýšenie presnosti by bolo možné dosiahnuť, ak by sme zahrnuli viac členov Bornovho radu do  $\Delta M_{\text{pert}}(\tau)$

---

<sup>1)</sup> Mohli by sme použiť aj inú hodnotu  $E_c$ , napr.  $E_c = 0,9\omega$  ako v Tabuľke 1. Zmenili by sa nutne aj hodnoty  $E'_c$ , ale hodnoty  $\Delta E_0$ , vypočítané pomocou vzťahu (23), by sa podstatne nezmenili.  $E_c = 1,5\omega$  sme zvolili kvôli zjavnej súvislosti s energiou prvého excitovaného stavu.

alebo ak by sme za neporušenú situáciu zobrali hamiltonián LHO bez vonkajšieho poľa a za poruchu považovali len člen, pochádzajúci od interakcie s elektrickým poľom. Presvedčili sme sa, že v takomto prípade sa podstatne zvýši horná hranica oblasti spoľahlivosti  $\tau_B$ . Pri  $\tau \sim \tau_B$  je potom príspevok kontínua veľmi malý, možno ho spoľahlivo zanedbať v porovnaní s príspevkom základného stavu, a vzťah (23) určuje  $\Delta E_0$  veľmi presne.

Zhrniem výsledky tejto časti, v ktorej bol predmetom štúdia LHO vo vonkajšom elektrickom poli. Ukázalo sa, že súčtové vzťahy poskytujú rozumnú hodnotu energie základného stavu, ak ich píšeme pre korekciu k euklidovskej Greenovej funkcii, spôsobenú poruchou, a nie pre celú Greenovu funkcii. Vystačíme pritom aj s najnižšími členmi Bornovho



Obrázok 1: Posun energetickej hladiny základného stavu LHO v závislosti od  $\epsilon = (eE)^2/2m\omega^3$ .

Plná čiara predstavuje presný výsledok  $\Delta E_0 = -\epsilon\omega$ , krúžky boli získané pomocou vzťahu (23) a dobre ich reprodukuje bodkovaná čiara [ $\Delta E_0 = -1,15\epsilon\omega$ ]. Krížiky a prerušovaná čiara [ $\Delta E_0 = -1,8\epsilon\omega$ ] pochádzajú zo vzťahu (21).

Tabuľka 2 : Energia základného stavu LHO vo vonkajšom elektrickom poli, získaná pomocou súčtového vzťahu pre korekciu k euklidovskej Greenovej funkcii, spôsobenú poľom [vzťah (23)]

$\epsilon$	$E'_c/\omega$	$\Delta E_0/\omega$	$\Delta E_0/\omega$ (presne)
0,01	1,43	-0,011	-0,01
0,02	1,36	-0,023	-0,02
0,03	1,29	-0,036	-0,03
0,05	1,15	-0,061	-0,05

radu a s priblížením voľného pohybu pre príspevok kontínua v súčtových vzťahoch. Domnievame sa, že získaný výsledok má všeobecnejšiu platnosť, a vzťahuje sa nielen na LHO, ale vôbec na systavy viazané nesingulárnym potenciálom.

Získaný výsledok má určitý vzťah aj k realistickejšej situácii v QCD. Je jednoduchou ilustráciou postupu, ktorý Ioffe a Smilga [168] úspešne použili na výpočet magnetických momentov nuklónov pomocou chromodynamických súčtových vzťahov. Dôležitým prvkom v ich výpočte boli totiž súčtové vzťahy pre korekciu k polarizačnému operátoru nuklónového prúdu, spôsobenú elektromagnetickým poľom  $F_{\mu\nu}$ .

### 8.3. Starkov jav v atóme vodíka

Ďalšou zaujímavou situáciou, v ktorej možno otestovať metódu súčtových vzťahov pre systavy vo vonkajšom poli, je atóm vodíka v elektrickom poli. V atómových jednotkách <sup>1)</sup> je hamiltonián sústavy

<sup>1)</sup> V atómových jednotkách (a.j.) je jednotkou dĺžky Bohrov polomer  $(m\alpha)^{-1}$ , jednotkou energie  $m\alpha^2$ , a jednotkou poľa  $m\alpha^3/e$  (pozri napr. [188]).

$$H = -\frac{1}{2} \Delta_r - \frac{1}{r} + \varepsilon_0 r \cos \theta, \quad (27)$$

kde  $\varepsilon_0$  označuje elektrické pole.

Na rozdiel od predchádzajúcej situácie, atóm vodíka je sústava viazaná coulombovským potenciálom, ktorý je singulárny pre  $r \rightarrow 0$ . To spôsobuje hneď dve osobitosti, ktoré znemožňujú použiť na hľadanie charakteristík základného stavu súčtové vzťahy v tej forme, ako sme ich písali v predchádzajúcej časti. Po prvé, vyššie členy Bornovho radu nie sú zanedbateľné (pozri ďalej) a, po druhé, nevyšťačíme s príspevkom kontínua v tvare priblíženia voľného pohybu.

Zastavím sa najprv pri druhom probléme. Bez vonkajšieho poľa je presné kontínuum dané súčtom príspevkov viazaných stavov, ktoré ležia nad základným stavom, a integrálom cez skutočné coulombovské kontínuum rozptylových stavov

$$M_c(\tau) = \sum_{n=2}^{\infty} |\psi_n(\vec{0})|^2 e^{-E_n \tau} + \int_0^{\infty} \rho_0(E) |\psi_E(\vec{0})|^2 e^{-E\tau} dE. \quad (28)$$

Pritom v atómových jednotkách

$$|\psi_n(\vec{0})|^2 = \frac{1}{\pi n^3} \quad ; \quad E_n = -\frac{1}{2n^2}, \quad (29)$$

$\rho_0(E)$  je hustota stavov kontínua (rovnaká ako v prípade voľných častíc)

$$\rho_0(E) = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{E}{2}} \quad (30)$$

a  $|\psi_E(\vec{0})|^2$  je štvorec vlnovej funkcie rozptylového stavu s energiou  $E$  [180]

$$|\psi_E(\vec{0})|^2 = \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}} \quad ; \quad \eta = \sqrt{1/2E} \quad (31)$$

Presné coulombovské kontínuum teda vyzerá takto

$$M_c^{\text{Coul}}(\tau) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{\tau/2n^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 - \exp(-\pi\sqrt{2/E})} e^{-E\tau} dE. \quad (32)$$

Pre veľké  $E$  sa podintegrálna funkcia blíži k  $\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{E}{2}}$ , čo je rovnaké ako v priblížení voľného pohybu, pre malé  $E$  sa však od neho podstatne líši.

Vzťah (32) možno s veľkou presnosťou nahradiť výrazom

$$M_c^{\text{Coul}}(\tau) \approx \int_{E_c}^{\infty} \rho_{\text{Coul}}(E) e^{-E\tau} dE, \quad (33)$$

pričom

$$\rho_{\text{Coul}}(E) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{pre } E_c \leq E \leq 0 \\ \frac{1/\pi}{1 - \exp(-\pi\sqrt{2/E})} & \text{pre } E \geq 0 \end{cases} \quad (34)$$

a  $E_c \approx -0,2$ . Vedení príkladom z predchádzajúcej kapitoly použijeme rovnaký tvar coulombovského kontínua aj pre nenulové polia ( $\mathcal{E}_0 \neq 0$ ) a vplyv interakcie s elektrickým poľom zahrnieme do zmeny efektívneho prahu kontínua  $E_c$ .

Prejdime teraz k problému výpočtu Bornovho radu pre euklidovskú Greenovu funkciu  $M(\tau)$ . Ak by sme postupovali rovnako, ako v prípade LHO, za poruchu zvolili coulombovský potenciál spolu s hamiltoniánom interakcie s poľom, a uvážili len najnižšie členy poruchového radu, tak by sme našli

$$M_{\text{pert}}(\tau) = M_0(\tau) \left[ 1 + \sqrt{2\pi\tau} + \frac{\pi^2}{3}\tau + \frac{1}{24}\mathcal{E}_0^2\tau^3 \right] \quad (35)$$

pričom teraz

$$M_0(\tau) = \left( \frac{1}{2\pi\tau} \right)^{3/2}. \quad (36)$$

Pokus nájsť oblasť spoľahlivosti pomocou kritérií z pred-

chádzajúcej časti by však bol márnny: neexistuje. Príčinou je pomalý pokles členov Bornovho radu.

Východiskom je zobrať za neporušený hamiltonián coulombovský hamiltonián bez poľa

$$H_0 = -\frac{1}{2} \Delta_r - \frac{1}{r} \quad (37)$$

a za poruchu považovať len interakciu s poľom

$$H' = \varepsilon_0 r \cos \theta. \quad (38)$$

Ukazuje sa, že prvé dva členy Bornovho radu možno spočítať v uzavretom tvare za pomoci Vološinovej reprezentácie pre coulombovskú Greenovu funkciu [pozri (5.38) a Dodatok B]; výsledok je (Dodatok J) <sup>1)</sup>

$$M_{\text{pert}}(\tau) = M_0(\tau) \left[ \phi(\gamma) + \frac{1}{24} \varepsilon_0^2 \tau^3 \xi(\gamma) \right], \quad (39)$$

pričom  $\phi(\gamma)$  je rovnaké ako v topóniových súčtových vzťahoch [vzťah (7.25)],  $\xi(\gamma)$  je dané výrazom

$$\xi(\gamma) = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \sum_{t=0}^{\infty} (t+1)(t+2)(t+3).$$

$$\begin{aligned} & \left\{ (1 - \delta_{t0}) \left[ \varphi_2 \left( \frac{\gamma}{t} \right) - \left( 1 + \frac{\gamma}{3} t \right) \varphi_1 \left( \frac{\gamma}{t} \right) \right] + \right. \\ & + 32 \left[ \varphi_2 \left( \frac{\gamma}{t+1} \right) - \left( 1 + \frac{4}{3} (t+1) \right) \varphi_1 \left( \frac{\gamma}{t+1} \right) \right] + \\ & + \frac{\gamma^2}{t+2} \left[ \varphi_3 \left( \frac{\gamma}{t+2} \right) - \frac{5}{2} \varphi_2 \left( \frac{\gamma}{t+2} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{5}{2} (t+2)^2 \right) \varphi_1 \left( \frac{\gamma}{t+2} \right) \right] - \\ & \left. - 32 \left[ \varphi_2 \left( \frac{\gamma}{t+3} \right) - \left( 1 - \frac{4}{3} (t+3) \right) \varphi_1 \left( \frac{\gamma}{t+3} \right) \right] - \right\} \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Podľa našich znalostí, výpočet coulombovských korekcií pre atóm vodíka vo vonkajšom poli sa v literatúre nevyskytuje a bol v tejto práci uskutočnený po prvý raz.

$$- \left[ \varphi_2 \left( \frac{\gamma}{t+4} \right) - \left( 1 - \frac{\gamma}{3} (t+4) \right) \varphi_1 \left( \frac{\gamma}{t+4} \right) \right] \}. \quad (40)$$

$\varphi_1(x)$  a  $\varphi_2(x)$  sú definované vzťahmi (7.27 a 28) a

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + x e^{x^2} (1 + \operatorname{erf} x). \quad (41)$$

Veličina  $\gamma$  označuje

$$\gamma = \sqrt{\tau/2}. \quad (42)$$

Na praktické výpočty je vhodné vyjadrenie  $\xi(\gamma)$  v tvare mocninného radu

$$\xi(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \gamma^n \quad (43)$$

pričom koeficienty  $c_n$  možno vypočítat pomocou vzťahu (J.8) a prvých dvadsať z nich je v Tabuľke 3. Graf funkcie  $\xi(\gamma)$  [spolu s  $\phi(\gamma)$ ] je na obr. 2.

Ďalej už možno zopakovať analýzu z predchádzajúcej časti. Použili sme rovnaké kritériá na hranice oblasti spoľahlivosti a korekciu k energii základného stavu sme určovali z analogických vzťahov ako (21) a (23). Výsledky zhrňa Tabuľka 4 a obr. 3.

Oblasť spoľahlivosti existovala pre polia  $e_0 \leq 0,3$  a.j. Pomocou vzťahu (21) nebolo možné hodnotu  $\Delta E_0$  spoľahlivo určiť: ani vnútri intervalu spoľahlivosti neexistovala stabilná hodnota  $\Delta E_0$ , a čísla, uvedené v Tabuľke 4, sú len orientačné. Ak sme použili vylepšený vzťah (23) na určenie  $\Delta E_0$ , našli sme hodnoty, ktoré súhlasia s približnými výpočtami Hehenbergera et al. [184] a Dolgova s Turbinerom [182], a pre vyššie polia sa podstatne líšia od výsledkov Damburga a Kolosova [185]. Maximálna odchýlka našich výsledkov od hodnôt, ktoré udávajú Hehenberger et al., je pritom rádu 30%. Zdá sa teda, že náš výpočet je popri práci [182] ďalším nezávislým argumentom v prospech správnosti hodnôt, ktoré udávajú autori článku [184].



Tabuľka 3 : Koeficienty mocninného rozvoja funkcie  $\xi(\gamma)$   
[vzťah (40)]

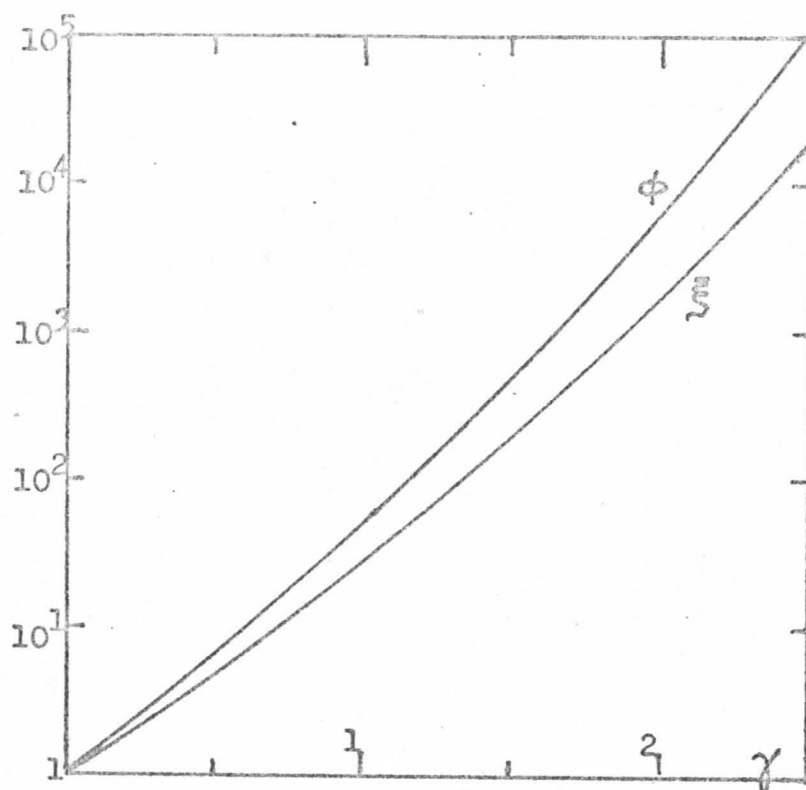
n	$c_n$
0	1,000 000 ( 0)
1	3,101 794 ( 0)
2	5,020 264 ( 0)
3	5,657 269 ( 0)
4	4,995 663 ( 0)
5	3,687 631 ( 0)
6	2,369 605 ( 0)
7	1,362 516 ( 0)
8	7,149 822 (-1)
9	3,474 269 (-1)
10	1,580 686 (-1)
11	6,791 327 (-2)
12	2,774 037 (-2)
13	1,083 059 (-2)
14	4,059 443 (-3)
15	1,465 918 (-3)
16	5,115 372 (-4)
17	1,729 268 (-4)
18	5,675 424 (-5)
19	1,811 724 (-5)
20	5,634 390 (-6)

Tabuľka 4 : Energia základného stavu atómu vodíka v elektrickom poli, určená zo súčtových vzťahov

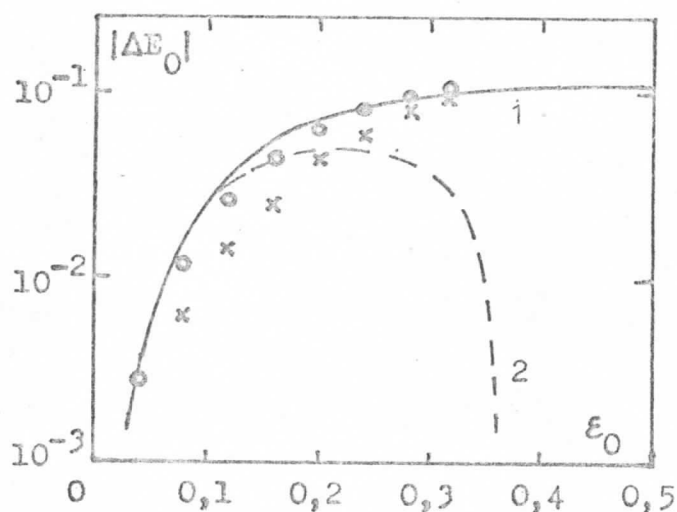
$\epsilon_0$	$E_c$	$\Delta E_0^a$ podľa (21)	$\Delta E_0$ podľa (23)	$\Delta E_0$ podľa [184]	$\Delta E_0$ podľa [185]
0,04	-0,22	-0,0007	-0,00285	-0,0037718	-0,003771591
0,08	-0,23	-0,0061	-0,0116	-0,01756	-0,017495363
0,12	-0,365	-0,014	-0,0259	-0,0372	-0,035567
0,16	-0,48	-0,025	-0,046	-0,0554	-0,04778
0,20	-0,50	-0,043	-0,062	-0,0705	-0,05260
0,24	-0,55	-0,060	-0,081	-0,083	-0,05082
0,28 <sup>b</sup>	-0,55	-0,080	-0,097		-0,0434
0,32 <sup>b</sup>	-0,55	-0,098	-0,110		-0,0311

<sup>a</sup> Orientačné hodnoty.

<sup>b</sup> Pre tieto polia je oblasť spoľahlivosti len veľmi malá, preto uvedené hodnoty  $E_c$  a  $\Delta E$  treba považovať za hrubý odhad.



Obrázok 2 : Grafy funkcií  $\phi(\gamma)$  a  $\xi(\gamma)$ .



Obrázok 3 : Energia základného stavu v atóme vodíka v elektrickom poli

1 - podľa [182, 184], 2 - podľa [185],

x - získaná zo súčtového vzťahu pre úplnú euklidovskú Greenovu funkciu, o - získaná zo súčtového vzťahu pre korekciu ku Greenovej funkcii

V kontexte ťažkých kvarkónií je najdôležitejšie, že študovaný príklad ukazuje, že v prípade singulárneho (konkrétne coulombovského) väzbového potenciálu možno relatívne presne odhadnúť energiu základného viazaného stavu vo vonkajšom poli pomocou metódy súčtových vzťahov len vtedy, keď

- i) zahrnieme coulombovské korekcie ku Greenovej funkcii;
- ii) nájdeme realistickú aproximáciu príspevku kontínua;
- iii) súčtové pravidlo píšeme priamo pre korekciu od vonkajšieho poľa.

Získaný výsledok je odpoveďou na otázku, prečo naivné súčtové vzťahy pre topónium zlyhali pri výpočte parametrov základného stavu (kap. 7). Zahrnul som síce vedúce coulom-

bovske korekcie (podmienka i), ale neuvážil som podmienky ii a iii. Situácia v prípade topónia však nie je rovnako číra a jednoduchá ako v prípade Starkovho javu, a vyžiada si ešte podrobnejšiu analýzu.

## Hlava VI. ZÁVERY PRE ĎALŠÍ ROZVOJ PROBLEMATIKY

Predkladaná kandidátska dizertačná práca sa zaoberá zaujímavým problémom fyziky vysokých energií, ktorý úzko súvisí s problémami, ktoré sa riešia v rámci čiastkovej úlohy štátneho plánu základného výskumu č. I-4-1/04 (Elementárne procesy v hadrónovej fyzike) vo Fyzikálnom ústave CEFV SAV v Bratislave, a ďalej s problémami, ktorými sa v rámci svojich čiastkových úloh zaoberajú niektorí pracovníci Katedry teoretickej fyziky MFF UK v Bratislave, Nukleárneho centra MFF UK a Fyzikálneho ústavu ČSAV v Prahe.

Zhrniem hlavné výsledky práce, ako boli sformulované v kapitolách 5, 7 a 8 a v článkoch [119, 120, 126, 127, a 186]:

1. Bola navrhnutá zovšeobecnená metóda výpočtu vplyvu vákuových kondenzátov na spektrá veľmi ťažkých kvarkónií. Výpočet posunov energetických hladín spôsobených vzájomným pôsobením kvarkónia s vákuovými fluktuáciami možno uskutočniť na základe sekulárnej rovnice (5.27).
2. V rámci navrhovanej metódy možno posúdiť adekvátnosť a presnosť priblížení Leutwylera a Vološina. Ich výsledky sú prirodzeným prvým priblížením metódy.
3. Na úplné využitie popísanej metódy je potrebná hlbšia znalosť správania gluónového prostredia v QCD, ktorá v súčasnosti nie je k dispozícii.
4. V snahe o riešenie rovnice (5.27) treba nájsť kompromis medzi dvoma extrémnymi možnosťami: buď využiť len minimum informácií o gluónovom prostredí, ale zahrnúť väzbu medzi singletnými kvarkóniovými stavmi, alebo úplne zanedbať väzbu a usilovať sa podrobnejšie vyšetriť správanie sa systému, keď sú kvark-antikvarkový pár i gluónové prostredie v oktetných stavoch. Závažnosť rôznych priblížení bola posúdená na Zalewského modeli dvojkanálového harmonického oscilátora. Ukázalo sa, že na nájdenie uspokojivej

hodnoty energie základného stavu v modeli je potrebná informácia o "oktetnom" sektore modelu. Väzba s vyššími "singletnými" stavmi v modeli hrá pri určovaní energií len relatívne malú úlohu.

Modelové výsledky sú náznakom, že ak hodnota gluónového kondenzátu je dosť veľká, možno očakávať nezanedbateľné korekcie k výsledkom Leutwylera a Vološina aj v prípade veľmi ťažkého kvarkónia (topónia). Naliehavo potrebný je preto presný výpočet hodnôt vákuových kondenzátov zo základných princípov QCD.

5. Chromodynamický analóg Starkovho javu v topóniu možno študovať aj metódou súčtových vzťahov Šifmana, Vajnštejna a Zacharova. Potrebné je však započítať všetky vedúce coulombovské korekcie ku koeficientom operátorového rozvoja. Tento výpočet uskutočnil pôvodne Vološin; jeho výsledky však obsahovali niekoľko drobných chýb, ktoré sú v práci opravené.

Prístupom cez súčtové vzťahy sa nepodarilo reprodukovat' výsledky Leutwylera a Vološina. Spočítaný efekt je minimálne o rád menší ako ich odhady. Zdá sa preto, že súčtové vzťahy nemožno bezprostredne a priamočiari aplikovať na výpočet vlastností topónií. Domnievam sa, že príčinou je coulombovská singularita kvark-antikvarkového potenciálu na malých vzdialenostiach.

6. Problémy súčtových vzťahov pre sústavy vo vonkajšom poli sme analyzovali na kvantovomechanických príkladoch. Ukázalo sa, že v prípade nesingulárneho potenciálu (lineárny harmonický oscilátor) možno určiť zmenu energie základného stavu, spôsobenú vonkajším poľom, s chybou menšou ako 20% aj v prípade relatívne silného poľa. Treba však písať súčtový vzťah pre korekciu k euklidovskej Greenovej funkcii, spôsobenú poľom, a nie pre celú Greenovu funkciu. Pritom stačí uvážiť najnižšie členy poruchového Bornovho radu pre Greenovu funkciu a príspevok vyšších stavov aproximovať veľmi jednoduchou funkciou.

V prípade singulárneho (coulombovského) potenciálu treba navyše zaradiť vyššie poruchové (coulombovské) korekcie a použiť realistickejšiu aproximáciu príspevku vyšších stavov. Pokiaľ je mi známe, coulombovské korekcie v prípade Starkovho javu v atóme vodíka sú v tejto práci spočítané po prvýkrát. Získané výsledky sú zaujímavé aj vo všeobecnejšom rámci a sú príspevkom k štúdiu nedoriešeného problému výpočtu Starkovho javu v atóme vodíka pre silnejšie polia.

Hlavné závery dizertačnej práce pre budúci výskum v oblasti fyziky veľmi ťažkých kvarkónií sú nasledujúce:

1. Na systematický a úplný výpočet energetických hladín ťažkých kvarkónií je potrebný detailnejší model (znalosť) vákua v QCD. Špeciálne, potrebné je zahrnúť aj vplyv korelačnej dĺžky vákuových kondenzátov.

2. Súčtové vzťahy pre topónium si vyžadujú zvláštnu pozornosť. Objavujú sa v nich osobitosti, ktoré v súčtových vzťahoch pre ľahšie a stredne ťažké kvarkóniá nehrali podstatnú úlohu. Potrebné je ďalšie, podrobnejšie štúdium.

Očakávané bohaté spektrum viazaných stavov t-kvarkov a antikvarkov raz možno zohraje veľmi dôležitú úlohu pri overovaní predpovedí kvantovej chromodynamiky, lebo predstavuje v jej rámci jeden z najjednoduchších objektov štúdia. Najprv však bude potrebné doriešiť niekoľko teoretických problémov, ktoré načrtáva aj predložená práca.

### Dodatok A. Gluónový kondenzát

Neporuchové efekty sa vyjadrujú v hlavnom texte cez gluónový kondenzát

$$G^2 \equiv \langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a(x) G^{a\mu\nu}(x) | 0 \rangle. \quad (1)$$

O gluónovom vákuu pritom predpokladáme, že je invariantné voči lorentzovským transformáciám i voči farebným transformáciám. Túto vlastnosť možno využiť na vyjadrenie hodnoty  $\langle 0 | E_i^a E_j^b | 0 \rangle$ , ktorá sa vyskytuje vo výpočtoch v štvrtej a piatej kapitole, cez  $G^2$ .

Invariantnosť voči rotáciám v priestore a vo farebnom priestore vedie k vzťahu

$$\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} E_i^a E_j^b | 0 \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{1}{8} \delta^{ab} \langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} \vec{E}^c \cdot \vec{E}^c | 0 \rangle. \quad (2)$$

Ak označíme štvorhybnosť  $QQ$ -páru  $q_\mu$ , tak v ich sústave hmotného streda môžeme zapísať

$$\vec{E}^a \cdot \vec{E}^a = - (q_\nu G^{a\mu\nu}) (q^\lambda G_{\mu\lambda}^a) / q^2 \quad (3)$$

Vďaka lorentzovskej invariantnosti vákuua však

$$\langle 0 | G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\lambda} | 0 \rangle = \frac{1}{4} \delta_{\nu}^{\lambda} \langle 0 | G_{\mu\tau}^a G^{a\mu\tau} | 0 \rangle, \quad (4)$$

takže konečne

$$\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} E_i^a E_j^b | 0 \rangle = - \frac{1}{96} \delta_{ij} \delta^{ab} G^2. \quad (5)$$

Dobré si je všimnúť záporné znamienko vo vzťahu (5). Fenomenologická hodnota  $G^2$  je kladná [pozri (2.17)], takže  $\langle 0 | \vec{E}^a \cdot \vec{E}^a | 0 \rangle < 0$ . Túto zaujímavú skutočnosť možno vysvetliť takto: v rámci kvantovej teórie poľa sú výrazy typu (1), (2) matematicky nedobre definované objekty. V poruchovej teórii sa liek nachádza procedúrou tzv. normálneho usporiadania: miesto  $\vec{E}^a$ ,  $\vec{E}^a$  sa definuje normálny



súčin

$$:\vec{E}^a \cdot \vec{E}^a: = \vec{E}^a \cdot \vec{E}^a - \langle 0_{\text{pert}} | \vec{E}^a \cdot \vec{E}^a | 0_{\text{pert}} \rangle \quad (6)$$

kde  $|0_{\text{pert}}\rangle$  označuje základný stav v poruchovej teórii. Potom prirodzene

$$\langle 0_{\text{pert}} | : \vec{E}^a \cdot \vec{E}^a : | 0_{\text{pert}} \rangle = 0. \quad (7)$$

V QCD sa však skutočný základný stav líši od poruchového; potom

$$\begin{aligned} \langle 0_{\text{skut}} | : \vec{E}^a \cdot \vec{E}^a : | 0_{\text{skut}} \rangle = \\ \langle 0_{\text{skut}} | \vec{E}^a \cdot \vec{E}^a | 0_{\text{skut}} \rangle - \langle 0_{\text{pert}} | \vec{E}^a \cdot \vec{E}^a | 0_{\text{pert}} \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Vákuové stredné hodnoty v (1) až (5) a v texte treba chápať v zmysle (8): ako stredné hodnoty normálnych súčinov operátorov v skutočnom vákuu. Záporná hodnota  $\langle 0 | \vec{E}^a \cdot \vec{E}^a | 0 \rangle$  je takto dôsledkom skutočnosti

$$\langle 0_{\text{skut}} | \vec{E}^a \cdot \vec{E}^a | 0_{\text{skut}} \rangle < \langle 0_{\text{pert}} | \vec{E}^a \cdot \vec{E}^a | 0_{\text{pert}} \rangle. \quad (9)$$

O inú interpretáciu záporného  $\langle 0 | \vec{E}^a \cdot \vec{E}^a | 0 \rangle$  sa možno pokúsiť zavedením indefinitnej metriky [106].

Dodatok B. Greenova funkcia pre coulombovský hamiltonián

V tomto dodatku odvodím Greenovu funkciu (GF) pre coulombovský hamiltonián

$$H(\alpha) \equiv -\frac{\Delta r}{w} - \frac{\alpha}{r} \quad (1)$$

viď vzťah (5.38). Tento tvar GF uvádza Vološin v druhom článku v [32] a možno ho výhodne použiť pri výpočtoch vplyvu gluónového kondenzátu na vlastnosti kvarkónií. Pokiaľ má byť známe, odvodenie tohto vzťahu sa v literatúre nevy-skytuje.

Greenova funkcia

$$G_\alpha(\vec{r}, \vec{R}; E) \equiv \langle \vec{r} | [H(\alpha) - E]^{-1} | \vec{R} \rangle \quad (2)$$

zrejme spĺňa diferenciálnu rovnicu

$$\left(-\frac{\Delta r}{w} - \frac{\alpha}{r} - E\right) G_\alpha(\vec{r}, \vec{R}; E) = \delta(\vec{r} - \vec{R}), \quad (3)$$

kde  $\Delta r$  je laplacián pôsobiaci na súradnice  $\vec{r}$ . Ak rozložíme  $G_\alpha$  do parciálnych vln [123]

$$\begin{aligned} G_\alpha(\vec{r}, \vec{R}; E) &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) G_l^{(\alpha)}(r, R; E) P_l\left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{rR}\right) = \\ &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} G_l^{(\alpha)}(r, R; E) \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (4)$$

[tu  $\vartheta, \varphi$  ( $\theta, \phi$ ) sú uhly, ktoré definujú smer vektora  $\vec{r}$  ( $\vec{R}$ );  $P_l$  sú štandardné Legendreove polynómy a  $Y$  guľové funkcie] a uvedomíme si, že

$$\Delta r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \hat{L}^2 \quad (5)$$

a

$$\hat{L}^2 Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = l(l+1) Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (6)$$

tak pre  $G_l^{(\alpha)}$  pri  $E = -\frac{k^2}{m}$  dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \left( k^2 - \frac{m\alpha}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \right] G_l^{(\alpha)}(r, R; -\frac{k^2}{m}) = -\frac{m\alpha}{4\pi r^2} \delta(r-R) \quad (7)$$

Po prechode k bezrozmerným premenným

$$\begin{aligned} \rho &\equiv 2kr, \\ \tau &\equiv 2kR, \\ \lambda &\equiv \frac{m\alpha}{2k}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$G_l^{(\alpha)}(\rho, \tau; \lambda) \equiv G_l^{(\alpha)}(r, R; -\frac{k^2}{m}),$$

dostaneme

$$\left\{ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \left[ \frac{1}{4} - \frac{\lambda}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] \right\} G_l^{(\alpha)}(\rho, \tau; \lambda) = -\frac{m\alpha}{2\pi \rho^2} \delta(\rho - \tau). \quad (9)$$

Rozložíme  $G_l^{(\alpha)}(\rho, \tau; \lambda)$  do úplného systému funkcií <sup>1)</sup>

$$F_s^l(\rho) = e^{-\frac{1}{2}\rho} \rho^l L_s^{2l+1}(\rho) \quad (10)$$

takto

$$G_l^{(\alpha)}(\rho, \tau; \lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} F_s^l(\rho) f_s^l(\tau). \quad (11)$$

Funkcie  $F_s^l(\rho)$  sú známe ako riešenia radiálnej Schrödingrovej rovnice pre atóm vodíka v bezrozmerných premenných

$$\left[ \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{d}{d\rho} \right) - \left( \frac{1}{4} - \frac{s+l+1}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) \right] F_s^l(\rho) = 0, \quad (12)$$

normalizované podľa

<sup>1)</sup>  $L_s^n(\rho)$  sú prídružené Laguerrove polynómy. Ich normalizácia je ako v príručke [122].

$$\int_0^{\infty} F_s^l(\varrho) F_{s'}^l(\varrho) \varrho d\varrho = \frac{(s+2l+1)!}{s!} \delta_{ss'} \quad (13)$$

Po dosadení (11) do (9), vynásobením s  $\varrho^2 F_{s'}^l(\varrho)$  a zintegrování cez  $\varrho$  ľahko nájdeme

$$f_s^l(\tau) = \frac{uk}{2\pi} \frac{s!}{(s+l+1-\lambda)(s+2l+1)!} F_s^l(\tau) \quad (14)$$

a hľadaný  $l$ -tý parciálny príspevok do GF je

$$G_l^{(u)}(\varrho, \tau; \lambda) = \frac{uk}{2\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s!}{(s+l+1-\lambda)(s+2l+1)!} F_s^l(\varrho) F_s^l(\tau), \quad (15)$$

čo po dosadení do rovnice (4) vedie skutočne k vzťahu (5.38).

Je treba poznamenať, že počas celého výpočtu som mlčky predpokladal exponenciálny pokles GF v nekonečnej vzdialenosti. To motivovalo výber "vodíkovej" bázy v rovnici (11).

Dodatok C. Podrobnejší výpočet maticového elementu  
v Leutwylerovom-Vološinovom vzťahu

V tomto dodatku zhrniem niektoré technické detaily výpočtu maticového elementu vo vzťahu (5.34). Podobná technika výpočtov sa totiž bude využívať aj v niektorých ďalších častiach práce. Zopakujem

$$\Delta E_{nl} = \frac{\pi^2}{18} G^2 \int d^3\vec{r} d^3\vec{R} \varphi_{nlm}^*(\vec{r}) \vec{r} G_\alpha(\vec{r}, \vec{R}; -\frac{k_n^2}{\omega_p^2}) \cdot \vec{R} \varphi_{nlm}(\vec{R}) \Big|_{\alpha = -\alpha_s/6}$$

Ak do vzťahu dosadím vyjadrenie (5.35) vlnových funkcií  $\varphi_{nlm}$  a Vološinovu reprezentáciu (5.38) pre coulombovskú Greenovu funkciu, tak nájdem

$$\begin{aligned} \Delta E_{nl} = & 4\pi C_{nl}^2 \eta \sum_{L=0}^{\infty} \int d^3\vec{r} d^3\vec{R} e^{-k_n(\tau+R)} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{R}) \cdot \\ & \cdot (2k_n r)^L (2k_n R)^L G_L^{(\alpha)}(r, R; -\frac{k_n^2}{\omega_p^2}) L_\nu^{2L+1}(2k_n r) L_\nu^{2L+1}(2k_n R) \cdot \\ & \sum_{M=-L}^{+L} Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) Y_{LM}^*(\vartheta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{LM}(\theta, \phi), \\ & \nu = n - l - 1, \end{aligned} \quad (1)$$

kde som využil známy vzťah

$$P_L\left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{rR}\right) = \frac{4\pi}{2L+1} \sum_{M=-L}^{+L} Y_{LM}^*(\vartheta, \varphi) Y_{LM}(\theta, \phi) \quad (2)$$

a označil ako  $C_{nl}$  normalizačnú konštantu vo vzťahu (5.35)

$$C_{nl} = (2k_n)^{3/2} \left[ \frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!} \right]^{1/2} \quad (3)$$

a  $\eta = \pi^2 G^2 / 18$ .

Ak ďalej využijeme vzťah [124]

$$(\vec{r} \cdot \vec{R}) = \frac{4\pi}{3} rR \sum_{\mu=-1}^1 Y_{1\mu}^*(\vartheta, \varphi) Y_{1\mu}(\theta, \phi) \quad (4)$$

dostaneme v (1)

$$\Delta E_{nl} = \frac{16\pi^2}{3} \eta C_{nl}^2 \int_0^\infty dr \int_0^\infty dR r^3 R^3 (2k_n r)^l (2k_n R)^l \cdot e^{-k_n(r+R)} \sum_{L=0}^\infty L_{\nu}^{2l+1} (2k_n r) G_L^{(a)}(r, R; -\frac{k_n^2}{u_g^2}) L_{\nu}^{2l+1} (2k_n R) \cdot \sum_{\mu=-1}^1 \sum_{M=-L}^L \left| \int d\Omega Y_{\ell\mu}(\theta, \phi) Y_{LM}(\theta, \phi) Y_{\mu}(\theta, \phi) \right|^2 \quad (5)$$

Použitím vztahov pre Wignerove 3j-symboly [125]

$$\int d\Omega Y_{\ell_1 \mu_1}(\theta, \phi) Y_{\ell_2 \mu_2}(\theta, \phi) Y_{\ell_3 \mu_3}(\theta, \phi) = \left[ \frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)}{4\pi} \right]^{1/2} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\sum_{M=-L}^L \sum_{\mu=-1}^1 \begin{pmatrix} 1 & \ell & L \\ \mu & \mu & M \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2\ell+1}, \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \ell & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{cases} \frac{\ell}{(2\ell-1)(2\ell+1)} & \text{pre } L = \ell - 1 \\ \frac{\ell+1}{(2\ell+1)(2\ell+3)} & \text{pre } L = \ell + 1 \\ 0 & \text{pre iné } L \end{cases} \quad (8)$$

nájdeme

$$\sum_{\mu=-1}^1 \sum_{M=-L}^L \left| \int d\Omega Y_{\ell\mu} Y_{LM} Y_{\mu} \right|^2 = \frac{3}{4\pi} \begin{cases} \frac{\ell}{2\ell+1} & \text{pre } L = \ell - 1 \\ \frac{\ell+1}{2\ell+1} & \text{pre } L = \ell + 1 \\ 0 & \text{pre iné } L \end{cases} \quad (9)$$

a po dosadení do (5)

$$\Delta E_{nl} = 4\pi\eta \frac{C_{nl}^2}{2\ell+1} \int_0^\infty dr \int_0^\infty dR r^3 R^3 (2k_n r)^l (2k_n R)^l e^{-k_n(r+R)}$$

$$L_{\nu}^{2l+1}(2knr) \left[ (l+1) G_{l+1}^{(\alpha)}\left(r, R; -\frac{kn^2}{u_{\nu}}\right) + l G_{l-1}^{(\alpha)}\left(r, R; -\frac{kn^2}{u_{\nu}}\right) \right] L_{\nu}^{2l+1}(2knR). \quad (10)$$

Skutočnosť, že vo vzťahu (10) sa objavuje len  $G_{l\pm 1}^{(\alpha)}$  má jednoduché fyzikálne vysvetlenie: dipólové prechody vedú k zmene orbitálneho kvantového čísla o jednotku.

Do (10) ďalej dosadíme explicitné vyjadrenie  $G_{l\pm 1}^{(\alpha)}$  [vzťah (5.38)] a po malej úprave dostaneme

$$\Delta E_{nl} = (l+1) \Omega^+ + l \Omega^-, \quad (11)$$

kde

$$\Omega^{\pm} \equiv u_{\nu} (2kn)^{-\nu} \frac{C_{nl}^2}{2l+1} \sum_{s=0}^{\infty} d_{s, l\pm 1} (J_{\nu s l}^{\pm})^2, \quad (12)$$

$$J_{\nu s l}^+ \equiv \int_0^{\infty} dr r^{2l+4} e^{-r} L_{\nu}^{2l+1}(r) L_s^{2l+3}(r), \quad (13)$$

$$J_{\nu s l}^- = J_{s, \nu, l-1}^+ \quad (14)$$

a označil som

$$d_{s l} \equiv \frac{s!}{(s+2l+1)! \left( s+l+1 + \frac{u_{\nu} s}{12kn} \right)}. \quad (15)$$

[Pripomínam, že  $\nu = n - l - 1$ .]

Integrály typu  $J_{\nu s l}^{\pm}$  sa počítajú ľahko pomocou vytvárajúcej funkcie pre prídružené Laguerrove polynómy [122]

$$L_l(x; t) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} t^s L_s^l(x) = \frac{1}{(1-t)^{l+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}}. \quad (16)$$

Napr.  $J_{\nu s l}^+$  je koeficientom  $K_{\nu s}$  v rozvoji funkcie

$$\begin{aligned}
 K(x,y) &\equiv \int_0^{\infty} dr r^{2l+4} e^{-r} L_{2l+1}(\tau; x) L_{2l+3}(\tau; y) \equiv \\
 &\equiv \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} x^i y^j K_{ij}
 \end{aligned} \tag{17}$$

Elementárny výpočet vedie k výsledku

$$K(x,y) = (2l+4)! \frac{(1-y)(1-x)^3}{(1-xy)^{2l+5}}, \tag{18}$$

odkiaľ vyplývajú nasledujúce hodnoty pre  $J_{\nu s l}^+$

$$J_{\nu s l}^+ = \frac{(n+l)!}{(n-l-1)!} \begin{cases} - (n+l+3)(n+l+2)(n+l+1) & \text{pre } s = \nu+1 \\ 2(n+l+2)(n+l+1)(2n-l) & \text{pre } s = \nu \\ -6(n+l+1)n(n-l-1) & \text{pre } s = \nu-1 \\ 2(2n+l)(n-l-1)(n-l-2) & \text{pre } s = \nu-2 \\ -(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3) & \text{pre } s = \nu-3 \\ 0 & \text{pre iné } s \end{cases} \tag{19}$$

Získaný výsledok treba dosadiť do vzťahov (14), (12) a nakoniec do vzťahu (11). Po zdĺhavých algebraických úpravách vplynie vzťah (4.18) s koeficientami  $a_{nl}$  podľa (5.39,40).



Dodatok D. Maticové elementy operátora  $K(E)$  v oscilátovom modeli

Výpočet maticových elementov operátora  $K(E)$ , ktorý vystupuje vo vzťahoch (5.58) až (5.61), je pomerne jednoduchý pre malé  $n$  a  $m$ . Zavediem označenie

$$K_{nm}^{(M)}(E) \equiv \sum_{N=0}^{M-1} \frac{1}{\epsilon_N^{(p)} - E}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \varphi_n^{(\omega_1)}(x) V(x) \varphi_N^{(\omega_2)}(x) \varphi_N^{(\omega_2)}(y) V(y) \varphi_m^{(\omega_1)}(y). \quad (1)$$

Toto  $K_{nm}$  je rovnaké ako vo vzťahu (5.62), no zahŕňa len konečný počet  $M$  členov v "oktetnej" Greenovej funkcii (5.63). Funkcie  $\varphi_n^{(\omega)}$  sú uvedené vo vzťahu (5.50).

Ak dosadíme do vzťahu (1) interakčný potenciál  $V(x) = \lambda \omega^2 x^2$  a  $\varphi_n^{(\omega)}$  podľa vzťahu (5.50), tak po jednoduchšej úprave dostaneme

$$K_{nm}^{(M)}(E) = \frac{\lambda^2 \omega^4}{(\omega_1 + \omega_2)^2} a_n a_m \sin \theta \cos \theta.$$

$$\cdot \sum_{N=0}^{M-1} \frac{a_N^2}{(N + \frac{1}{2}) \omega_2 - E} v_{mN}(\theta) v_{nN}(\theta), \quad (2)$$

pričom som označil

$$\theta = \arctg \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} \quad (3)$$

a

$$a_n = \left( \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \right)^{1/2}, \quad (4)$$

a  $v_{nN}(\theta)$  sú integrály

$$v_{mN}(\theta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2/2} H_m(\xi \sin \theta) \xi^2 H_N(\xi \cos \theta). \quad (5)$$

Parita podintegrálnej funkcie je  $(-1)^{n+N}$ , takže integrál je nenulový iba vtedy, keď sú buď  $n$  a  $N$  obe párne čísla, alebo obe nepárne čísla. Táto vlastnosť spôsobuje v texte spomínaný jednoduchý tvar matice  $K_{nm}$ , pozri vzťah (5.66).

Podobné integrály možno pohodlne spočítať pomocou vytvárajúcej funkcie pre Hermitove polynómy [122]

$$H(x; z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(x) = e^{-x^2 + 2xz} \quad (6)$$

Zrejme  $v_{nN}(\theta)/(n!N!)$  je koeficientom pri  $t^n z^N$  v mocninnom rozvoji funkcie

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\theta; t, z) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2/2} H(\xi \sin \theta; t) \xi^2 H(\xi \cos \theta; z) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{v_{nN}(\theta)}{n! N!} t^n z^N. \end{aligned} \quad (7)$$

Jednoduchým vyčíslením gaussovských integrálov výjde

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\theta; t, z) &= \sqrt{2\pi} [1 + 4(z \cos \theta + t \sin \theta)^2] \cdot \\ &\cdot \exp[(z^2 - t^2) \cos 2\theta + 2zt \sin 2\theta]. \end{aligned} \quad (8)$$

Z mocninného rozvoja tejto funkcie nájdeme  $v_{nN}(\theta)$  pre špeciálne prípady, ktoré nás zaujímajú, a po dosadení do vzťahu (2) a úprave aj prislúchajúce  $K_{nm}^{(M)}(E)$ .

V analýze rôznych priblížení k Zalewského modelu boli potrebné nasledujúce maticové elementy:

(i) v priblíženiach (Ia), (Ib):

$$\begin{aligned} K_{2k, 2l}^{(1)}(E) &= \frac{1}{\frac{1}{2}\omega_8 - E} \cdot \frac{\lambda^2}{4\omega^2} \sqrt{\omega_1 \omega_8} (\omega_8 - \omega_1) \cdot \\ &\cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+l} \sqrt{\binom{2k}{k} \binom{2l}{l}} \left(\frac{\omega_8 - \omega_1}{\omega_1 + \omega_8}\right)^{k+l} \cdot \\ &\cdot [\omega_8 - (4k+1)\omega_1] [\omega_8 - (4l+1)\omega_1] \end{aligned} \quad (9)$$

(ii) v približeniach (II) a (III):

$$\begin{aligned}
 K_{kk, \ell \ell}^{(M)}(E) &= \frac{1}{2} \lambda^2 \sqrt{\omega_1 \omega_2} (\omega_2 - \omega_1) \cdot \\
 \sum_{N=0}^{M-1} \frac{1}{(4N+1)\omega_2 - 2E} \binom{2N}{N} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \right) \right]^{2N} \left( -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^{k+\ell} \cdot \\
 &\cdot \left[ (4N+1) \frac{\omega_2}{\omega} - \frac{\omega_1}{\omega} \right]^{2-k-\ell} \cdot \left[ (4N+1) \frac{\omega_2^3}{\omega^3} - \right. \\
 &\left. - (32N^2 + 16N + 7) \frac{\omega_1 \omega_2^2}{\omega^3} + 11(4N+1) \frac{\omega_1^2 \omega_2}{\omega^3} - 5 \frac{\omega_1^3}{\omega^3} \right]^{k+\ell}
 \end{aligned} \tag{10}$$

pre  $k, \ell \in \{0, 1\}$ .

Dodatok E. Vzťah polarizačného operátora k nerelativistickej Greenovej funkcii

Naznačím tu argumenty, ktoré v nerelativistickej limite privedú k vzťahu (7.11):<sup>1)</sup>

$$\Pi(p^2) \Big|_{\substack{p^2=4u^2-4k^2 \\ k^2 \ll u^2}} = \frac{3}{2u^2} \lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow 0 \\ \vec{y} \rightarrow 0}} G_Q(\vec{x}, \vec{y}; -k^2/u)$$

+ nepodstatná konštanta

Esencia dôkazu je v tom, že v nerelativistickej limite pod prahom imaginárna časť  $\Pi$  je nasýtená príspevkami rezonancií a 'necíti' kontínium. Príspevok n-tého  $^3S_1$  stavu je daný Van Royenovým-Weisskopfovým vzťahom [176, 177]

$$\text{Im } \Pi(s) \Big|_{n^3S_1} = \frac{12\pi}{M_{n0}} |Z_{n0}(\vec{0})|^2 \delta(s - M_{n0}^2), \quad (1)$$

$M_{n0}$  je jeho hmotnosť.  $\Pi(s)$  je určené disperzným vzťahom s jednou subtrakciou

$$\begin{aligned} \Pi(p^2) &= \frac{p^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } \Pi(s)}{s(s-p^2)} ds = \\ &= 12p^2 \sum_n \frac{|Z_{n0}(\vec{0})|^2}{M_{n0}^3 (M_{n0}^2 - p^2)} \end{aligned} \quad (2)$$

V nerelativistickej limite ( $E_{n0} = M_{n0} - 2m$ ) približne

$$\Pi(p^2) \Big|_{\substack{p^2=4u^2-4k^2 \\ k^2 \ll u^2}} = \frac{3}{2u^2} \sum_n \frac{|Z_{n0}(\vec{0})|^2}{E_{n0} + k^2/u} \quad (3)$$

Súčet na pravej strane je však práve

<sup>1)</sup> V tomto dodatku nevypisujem index t.

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \tilde{y} \rightarrow 0}} G_R(\lambda, \tilde{y}; E) \quad \text{pro } E = -k^2/\mu \quad (4)$$

a náš důkaz je ukončený.

Dodatok F: Odvođenje polarizačného operátora t-kvarkov  
v nerelativistickej limite

Prvý člen vo vzťahu (7.12) v limite  $\vec{x} \rightarrow 0$ ,  $\vec{y} \rightarrow 0$  pomocou (5.38) dáva

$$\{1\} = \lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow 0 \\ \vec{y} \rightarrow 0}} G_{\beta}(\vec{x}_i, \vec{y}_i; -\frac{k^2}{m_t}) = \frac{m_t k}{2\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{[L_s^1(0)]^2}{(s+1)(s+1 - \frac{m_t \beta}{2k})}, \quad (1)$$

čo pomocou  $L_s^1(0) = s + 1$  a jednoduchých úprav vedie na

$$\{1\} = G_{\beta}(\vec{0}_i, \vec{0}_i; -k^2/m_t) = \frac{m_t k^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k - k_n}, \quad (2)$$

kde  $k_n = 2m_t \alpha_s / 3n$ . Tento výraz je divergentný; jeho regularizáciou sa v zmysle poznámky za vzťahom (7.14) nebudem zaoberať.

Druhý člen označím  $\{2\}$

$$\{2\} = -\eta \int d^3\vec{r} d^3\vec{R} (\vec{r} \cdot \vec{R}) G_{\beta}(\vec{0}_i, \vec{r}_i; -k^2/m_t) \cdot G_{\alpha}(\vec{r}_i, \vec{R}_i; -k^2/m_t) G_{\beta}(\vec{R}_i, \vec{0}_i; -k^2/m_t) \quad (3)$$

Jeho výpočet bude analogický výpočtu  $\Delta E_{nl}$  v Dodatku C. Najprv využijeme [pozri (5.38)]

$$G_{\beta}(\vec{0}_i, \vec{r}_i; -\frac{k^2}{m_t}) = \frac{m_t k}{2\pi} e^{-kr} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s+1-\lambda} L_s^1(2kr), \quad (4)$$

kde  $\lambda = 2m_t \alpha_s / 3k$ , a preintegrujeme cez uhlové premenné rovnako, ako v Dodatku C [pozri (C.1,2,4-9)]. Takto dostaneme

$$\{2\} = -\frac{1}{4\pi m_t^2} \eta \left(\frac{m_t}{2k}\right)^5 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s+1-\lambda} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{t!}{(t+2+\frac{\lambda}{8})(t+3)!} \cdot \sum_{u=0}^{\infty} \frac{1}{u+1-\lambda} J_{st0}^+ J_{ut0}^+ \quad (5)$$

pričom integrál  $J_{stl}^+$  bol zavedený vzťahom (C.13) a jeho hodnoty pre rôzne  $s$ ,  $t$  a  $l$  udáva vzťah (C.19).  $J_{st0}^+$  možno

kompaktne zapísať ako

$$J_{st}^+ = (t+3)(t+2)(t+1) J_{st}, \quad (6)$$

kde

$$J_{st} = \begin{cases} (-1)^{i+1} \binom{4}{i} (t+i) & \text{pre } s=t-1+i, \\ & i=0,1,2,3,4, \\ 0 & \text{pre iné } s. \end{cases} \quad (7)$$

Po dosadení do (5) výjde

$$\{2\} = -\frac{1}{4\pi u_t^2} \eta \left(\frac{u_t}{2k}\right)^5 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(t+3)(t+2)(t+1)}{t+2+\lambda/8} \cdot \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 (-1)^{i+j} \binom{4}{i} \binom{4}{j} \frac{t+i}{t+i-\lambda} \cdot \frac{t+j}{t+j-\lambda}. \quad (8)$$

Posledný súčet sa ľahko upraví na

$$\left[ \sum_{i=0}^4 (-1)^i \binom{4}{i} \frac{1}{\theta+i} \right]^2, \quad (9)$$

pričom  $\theta \equiv t - \lambda$ , a vypočíta sa pomocou Melzakovej identity [178], ktorá platí pre polynóm  $f(x)$  nanajvýš  $n$ -tého stupňa <sup>1)</sup>

$$\frac{f(x+y)}{y(y+1)\dots(y+n)} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{f(x-k)}{y+k} \quad (10)$$

pre  $f(x) \equiv 1$ :

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \frac{1}{\theta+i} = \frac{n! \Gamma(\theta)}{\Gamma(\theta+n+1)}. \quad (11)$$

Ako výsledok potom máme

$$\{2\} = -\frac{\pi}{4} G^2 \frac{u_t^3}{k^5} \lambda^2 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(t+1)(t+2)(t+3)}{t+2+\lambda/8} \left[ \frac{\Gamma(t-\lambda)}{\Gamma(t+5-\lambda)} \right]^2 \quad (12)$$

a po dosadení {1} a {2} do (7.11) vychádza vzťah (7.13).

<sup>1)</sup> Koeficienty v súčte na pravej strane identity sú vlastne koeficientami rozkladu funkcie na ľavej strane do parciálnych zlomkov. Možno sa o tom ľahko presvedčiť.

Dodatok G. Niektoré vlastnosti Laplaceovej transformácie

Tu zhrniem najdôležitejšie vlastnosti Laplaceovej transformácie, ktoré som využíval pri hľadaní inverznej Laplaceovej (borelovskej) transformácie funkcií v kapitolách 7 - 8. Väčšinu uvedených vzťahov možno nájsť v matematickej literatúre [179] a ich dôkazy sú jednoduché.

$$F(E) \equiv L[f](E) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-E\tau} d\tau, \quad (1)$$

(pozri [179], vzťah (8.2-1)),

$$F(\alpha E) \xrightarrow{LT^{-1}} \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{\tau}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0, \quad (2)$$

$$F(E - \alpha) \xrightarrow{LT^{-1}} f(\tau) e^{\alpha\tau}, \quad (3)$$

$$F(E)G(E) \xrightarrow{LT^{-1}} \int_0^{\tau} d\theta f(\tau - \theta) g(\theta), \quad (4)$$

(pozri [179], tabuľka (8.3-1)),

$$\frac{1}{E^{n+1}} \xrightarrow{LT^{-1}} \frac{1}{\Gamma(n+1)} \tau^n \quad (5)$$

(pozri [179], tabuľka (8.4-1)),

$$F(\sqrt{E}) \xrightarrow{LT^{-1}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\tau^3} \int_0^{\infty} t f(t) e^{-t^2/4\tau} dt \quad (6)$$

Pomocou uvedených vzťahov

$$\frac{1}{\sqrt{E - \alpha}} \xrightarrow{LT^{-1}} \alpha \left[ \varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi} x} \right] \quad (7)$$

(pozri [179], tabuľka 8.4-1, vzťah 37),

$$\frac{1}{(\sqrt{E - \alpha})^2} \xrightarrow{LT^{-1}} (1 + 2x^2) \varphi(x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} x, \quad (8)$$



$$\frac{1}{(\sqrt{s} - \alpha)^3} \xrightarrow{LT^{-1}} \frac{2}{\alpha} \left[ x^2 \left( x^2 + \frac{3}{2} \right) \varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} x (1+x^2) \right] \quad (9)$$

pričom

$$\varphi(x) \equiv e^{x^2} (1 + \operatorname{erf} x), \quad (10)$$

$\operatorname{erf} x$  je funkcia chýb

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (11)$$

a

$$x = \alpha \sqrt{\tau}. \quad (12)$$

Dodatok H. Výpočet  $M(\tau)$  pre topónium

V tomto dodatku podrobnejšie vypočítam

$$M(\tau) \equiv \lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow 0 \\ \vec{y} \rightarrow 0}} K(\vec{x}, \vec{y}; \tau), \quad (1)$$

pričom  $M(\tau)$  je viazané s  $G_Q(\vec{0}, \vec{0}; -\frac{k^2}{m_t})$  inverznou Laplaceovou (borelovskou) transformáciou [pozri vztahy (7.18-19)].

Prvý člen v  $G_Q(\vec{0}, \vec{0}; -\frac{k^2}{m_t})$  najprv upravím

$$\begin{aligned} \{1\} &= \frac{u_t k^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k - k_n} = \frac{u_t k}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{k_1}{k} \frac{1}{n}} = \\ &= \frac{u_t}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \xi(n) \frac{k_1^n}{(k^2)^{(n-1)/2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

(Posledný súčet píšem len formálne; členy s  $n = 0$  a  $n = 1$  nie sú dobre definované a neskôr upresním ich zmysel.)

Pomocou vzťahov (7.20) a (7.21) potom dostaneme prvý príspevok do  $M(\tau)$  v tvare

$$\begin{aligned} M^{(1)}(\tau) &= \frac{u_t}{2\pi\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi(n) k_1^n}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \left(\frac{\tau}{u_t}\right)^{\frac{n-1}{2}} = \\ &= M_0(\tau) \phi(\gamma) \end{aligned} \quad (3)$$

pričom  $M_0(\tau)$  je euklidovská Greenova funkcia pre voľnú časticu [180]

$$M_0(\tau) = \left(\frac{u_t}{4\pi\tau}\right)^{3/2} \quad (4)$$

$\gamma$  je coulombovský parameter,  $\gamma = \frac{2}{3} \alpha_s \sqrt{m_t \tau}$ , a

$$\phi(\gamma) = 4\sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi(n)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \gamma^n. \quad (5)$$

$M^{(4)}(\tau)$  je jedinou častou  $M(\tau)$ , ktorá by nebola nulová, ak by  $G^2 = 0$ . Zrejme je to euklidovská Greenova funkcia (propagátor) pre coulombovský problém. Táto je v literatúre známa [161, 180] a veľmi podrobne a rigorózne je odvodená v dodatku článku Whitentona et al. [180]. Porovnanie s ich výsledkom prezrádza, ako dodefinovať prvé dva členy vo vzťahu (5):

$$\xi(0) = -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{\xi(n)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Tvrďším orieškom je výpočet inverznej Laplaceovej transformácie druhého člena vo vzťahu (7.13). Ak dosadíme  $k \equiv \sqrt{m_t E}$  a  $\lambda = \frac{2}{3} \alpha_s \sqrt{m_t/E}$ , tak dostaneme

$$\{2\} = \frac{243 \pi}{128 m_t^2 \alpha_s^5} G^2 \sum_{t=0}^{\infty} (t+1)(t+2)(t+3) \mathcal{L}_t(\alpha) \quad (7)$$

kde  $\alpha \equiv 1/\lambda = 3\sqrt{E} / 2\sqrt{m_t} \alpha_s$  a

$$\mathcal{L}_t(\alpha) = \frac{\alpha^4}{[(t+2)\alpha + \frac{1}{8}] (t\alpha - 1)^2 [(t+1)\alpha - 1]^2 [(t+2)\alpha - 1]^2 [(t+3)\alpha - 1]^2 [(t+4)\alpha - 1]^2} \quad (8)$$

Podľa štandardného receptu na výpočet inverznej Laplaceovej transformácie racionálnych lomených výrazov [179] treba  $q_t(\alpha)$  najprv rozložiť do parciálnych zlomkov; výsledok je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t(\alpha) &= \frac{2^{18} (t+2)^3}{3^4 [\delta_1 (t+2)^2 - 1]^2 [\delta_1 (t+2)^2 - 4]^2} \cdot \frac{1}{\alpha + \frac{1}{8(t+2)}} + \\ &+ \frac{(1 - \delta_{t0}) t^3}{72(9t+16)} \left\{ \frac{1}{(\alpha - 1/t)^2} - t \left[ 5 + \frac{t}{6} \left( 25 - \frac{6}{9t+16} \right) \right] \frac{1}{\alpha - 1/t} \right\} + \\ &+ \frac{2(t+1)^3}{9(9t+17)} \left\{ \frac{1}{\left(\alpha - \frac{1}{t+1}\right)^2} - (t+1) \left[ 5 + \frac{t+1}{3} \left( 5 - \frac{3}{9t+17} \right) \right] \frac{1}{\alpha - \frac{1}{t+1}} \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(t+2)^3}{18} \left\{ \frac{1}{\left(x - \frac{1}{t+2}\right)^2} - (t+2) \frac{44}{9} \cdot \frac{1}{x - \frac{1}{t+2}} \right\} + \\
& + \frac{2(t+3)^3}{9(9t+19)} \left\{ \frac{1}{\left(x - \frac{1}{t+3}\right)^2} - (t+3) \left[ 5 - \frac{t+3}{3} \left( 5 + \frac{3}{9t+19} \right) \right] \frac{1}{x - \frac{1}{t+3}} \right\} + \\
& + \frac{(t+4)^3}{72(9t+20)} \left\{ \frac{1}{\left(x - \frac{1}{t+4}\right)^2} - (t+4) \cdot \right. \\
& \quad \left. \left[ 5 - \frac{t+4}{6} \left( 25 + \frac{6}{9t+20} \right) \right] \frac{1}{x - \frac{1}{t+4}} \right\} \quad (9)
\end{aligned}$$

pričom  $\delta_{t0} = 1$  pri  $t = 0$  a  $0$  pri  $t \neq 0$ .

Pomocou vlastností a vzťahov pre inverzné Laplaceove transformácie, ktoré sú uvedené v Dodatku G, možno po zdĺhavej úprave odvodiť vzťah pre príspevok do  $M(\tau)$ , ktorý je lineárny v  $G^2$ :

$$M^{(2)}(\tau) = M_0(\tau) \left[ -\frac{\pi^2}{72} G^2 \frac{\tau^3}{u_t} \chi(\gamma) + \dots \right] \quad (10)$$

pričom  $\chi(\gamma)$  je uvedené vo vzťahu (7.26). Tri bodky v poslednom vzorci označujú členy, ktoré divergujú v limite  $\gamma \rightarrow 0$ . Ich prítomnosť je púhym artefaktom rozkladu na parciálne zlomky [vzťah (9)]; dá sa ľahko dokázať, že koeficienty pri všetkých členoch, ktoré divergujú pri  $\gamma \rightarrow 0$ , sú nulové.

Ako výsledok teda máme

$$M(\tau) = M_0(\tau) \left[ \phi(\gamma) - \frac{\pi^2}{72} G^2 \frac{\tau^3}{u_t} \chi(\gamma) \right]. \quad (11)$$

Výraz (7.26) pre funkciu  $\chi(\gamma)$  nie je pre praktické výpočty najvhodnejší. Pomocou mocninných rozvojev funkcií  $\varphi_1(x)$  a  $\varphi_2(x)$  [pozri (7.27) a (7.28)]

$$\varphi_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i,$$

$$A_i = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{n+1}}{(2n+3)!!} & \text{pre } i = 2n \\ \frac{1}{(n+2)!} & \text{pre } i = 2n + 1 \end{cases} \quad (12)$$

a

$$\varphi_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i x^i, \quad (13)$$

$$B_i = \frac{i+1}{2} A_i$$

ľahko odvodíme mocninny rozvoj funkcie  $\chi(\gamma)$

$$\chi(\gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \gamma^i$$

$$b_i = 4\sqrt{\pi} B_i \sum_{t=0}^{\infty} (t+1)(t+2)(t+3).$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1-\delta t_0}{(9t+16)t^2} \left\{ 1 - \frac{2}{i+1} \left[ 1 + \frac{t}{12} \left( 25 - \frac{6}{9t+16} \right) \right] \right\} + \right. \\ & + \frac{16}{(9t+17)(t+1)^2} \left\{ 1 - \frac{2}{i+1} \left[ 1 + \frac{t+1}{6} \left( 5 - \frac{3}{9t+17} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{4}{(t+2)^{2+1}} \left\{ 1 - \frac{17}{9} \frac{1}{i+1} \right\} + \\ & + \frac{16}{(9t+19)(t+3)^2} \left\{ 1 - \frac{2}{i+1} \left[ 1 - \frac{t+3}{6} \left( 5 + \frac{3}{9t+19} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{(9t+20)(t+4)^2} \left\{ 1 - \frac{2}{i+1} \left[ 1 - \frac{t+4}{12} \left( 25 + \frac{6}{9t+20} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{512}{9(i+1)} \cdot \frac{1}{(t+2) [81(t+2)^2 - 1]^2 [81(t+2)^2 - 4]^2} \\ & \cdot \left[ -\frac{1}{8(t+2)} \right]^i \quad (14) \end{aligned}$$

špeciálne <sup>1)</sup>

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{197}{128} \sqrt{\pi}, \quad (15)$$

číselné hodnoty ďalších koeficientov zhrňa Tabuľka 7.1.

---

<sup>1)</sup> Vološin [161] udáva chybnú hodnotu  $b_1 = \frac{53}{32} \sqrt{\pi}$ , ktorá sa od správnej líši o menej než 8%.

Dodatok I. Výpočet prvých členov Bornovho radu pre euklidovskú Greenovu funkciu LHO v elektrickom poli

Vo všeobecnosti má Bornov rad pre  $G(x', t'; x, t)$  tvar (pozri napr. [180])

$$G(x', t'; x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x', t'; x, t) \quad (1)$$

kde

$$G_0(x', t'; x, t) \equiv \left[ \frac{u}{2\pi i (t' - t)} \right]^{1/2} \exp \left[ - \frac{u (x' - x)^2}{2i (t' - t)} \right] \quad (2)$$

a

$$G_n(x', t'; x, t) = (-i)^n \int_t^{t'} dt_n \int_t^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_t^{t_2} dt_1 \cdot \int dx_n \dots \int dx_1 G_0(x', t'; x_n, t_n) V(x_n) G_0(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot V(x_{n-1}) \dots V(x_1) G_0(x_1, t_1; x, t). \quad (3)$$

Pre  $M(\tau)$  máme podobne

$$M(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(0, -i\tau; 0, 0). \quad (4)$$

Budem brať za poruchu tak oscilátorový potenciál, ako aj interakčný hamiltonián LHO s elektrickým polom [pozri vzťah (8.14)].  $M_0(\tau)$  bude dané vzťahom (8.16); prvý bornovský člen bude

$$\begin{aligned} M_1(\tau) &= - \int_0^{\tau} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 G_0(0, -i\tau; x_1, -it_1) V(x_1) \cdot G_0(x_1, -it_1; 0, 0) = \\ &= - \frac{u}{2\pi} \int_0^{\tau} \frac{dt_1}{\sqrt{(\tau - t_1)t_1}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 V(x_1) \exp \left[ - \frac{u\tau}{2t_1(\tau - t_1)} x_1^2 \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

Interakcia s elektrickým polom dá nulový príspevok

kvôli parite podintegrálnej funkcie, a oscilátorový potenciál prispeje členom

$$M_1(\tau) = -\frac{\mu^2 \omega^2}{4\pi} \int_0^\tau \frac{d\tau_1}{\tau_1(\tau-\tau_1)} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 x_1^2 \exp\left[-\frac{\mu\tau}{2\tau_1(\tau-\tau_1)} x_1^2\right] \quad (6)$$

Gaussovský integrál na pravej strane sa dá ľahko spočítať; zvyšný integrál cez  $\tau_1$  je potom triviálny. Výsledkom je

$$M_1(\tau) = M_0(\tau) \left[ -\frac{1}{12} (\omega\tau)^2 \right], \quad (7)$$

v súhlase napr. s článkom [180].

Druhý člen  $M_2(\tau)$  je

$$M_2(\tau) = \int_0^\tau dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdot \\ \cdot G_0(0, -it; x_2, -it_2) V(x_2) G_0(x_2, -it_2; x_1, -it_1) \cdot \\ \cdot V(x_1) G_0(x_1, -it_1; 0, 0). \quad (8)$$

Členy, ktoré obsahujú elektrické pole  $E$  lineárne, sú nulové, ostatné členy si vyžadujú len vyčíslenie gaussovských integrálov cez  $x_1, x_2$  a triviálnych integrálov cez  $\tau_1$  a  $\tau_2$ . Výsledok je

$$M_2(\tau) = M_0(\tau) \left[ \frac{1}{12} (\omega\tau)^3 \epsilon + \frac{(\omega\tau)^4}{160} \right], \quad (9)$$

opäť v zhode s článkom [180] a s rozvojom presného výsledku [vzťah (8.13)].

Rovnaký výsledok by sa dal získať ináč, štartujúc z Bornovho radu pre časovo-nezávislú Greenovu funkciu hamiltoniánu  $H$  [vzťah (6)]

$$G(x; E) \equiv \langle x | (H - E)^{-1} | 0 \rangle = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_k(x) \psi_k^*(0)}{E_k - E} \quad (10)$$



a za pomoci alternatívnej definície  $M(\tau)$  cez borelovskú transformáciu

$$M(\tau) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-E')^{n+1}}{n!} \left( \frac{d}{dE'} \right)^n G(x; E') \Big|_{\substack{x=0 \\ E' = -n}} \quad (11)$$

Takýto postup bude užitočný pri štúdiu Starkovho javu v atóme vodíka (pozri Dodatok J).

Dodatok J. Výpočet prvých členov Bornovho radu pre  
euklidovskú Greenovu funkciu atómu vodíka  
v elektrickom poli

Pri tomto výpočte budem postupovať tak, že najprv vy-  
počítam prvé členy Bornovho radu pre bezčasovú Greenovu  
funkciu  $G(\vec{x}; E)$  a potom určím  $M(\tau)$  pomocou vzťahu (I.11),  
resp. pomocou inverznej Laplaceovej transformácie, ktorá  
s ním úzko súvisí. Celý výpočet v mnohom pripomenie výpoč-  
ty, ktoré som predviedol v Dodatkoch F a H.

Výpočet nultého člena Bornovho radu je úplne rovnaký  
ako v spomínaných dodatkoch, uvediem preto len výsledok

$$M^{(0)}(\tau) = M_0(\tau) \phi(\gamma)$$

ako vo vzťahu (8.39).

Prvý člen Bornovho radu pre  $G$  dá

$$G^{(1)}(\vec{0}_i; -E) = -\int d^3\vec{r} G_\alpha(\vec{0}_i, \vec{r}_i; -E) (\vec{r} \cdot \vec{E}_0) G_\alpha(\vec{r}_i, \vec{0}_i; -E) \quad (1)$$

s  $\alpha = 1$ . Keďže  $G_\alpha(\vec{0}, \vec{r}; -E)$  je sféricky symetrické [pozri  
(F.4)], bude príspevok tohto člena nulový.

Druhý člen Bornovho radu pre  $G$  je vďaka sférickej sy-  
metrii systému možné zapísať v tvare

$$G^{(2)}(\vec{0}_i; -E) = \frac{1}{3} \epsilon_0^2 \int d^3\vec{r} d^3\vec{R} (\vec{r} \cdot \vec{R}) G_\alpha(\vec{0}_i, \vec{r}_i; -E) \cdot G_\alpha(\vec{r}_i, \vec{R}_i; -E) G_\alpha(\vec{R}_i, \vec{0}_i; -E), \quad (2)$$

čo sa len veľmi málo líši od toho, čo som počítal v Dodat-  
ku F [vzťah (F.3) a ďalej]. Medzikroky výpočtu nebudem o-  
pakovať: ich výsledkom je

$$G^{(2)}(\vec{0}_i; -E) = \frac{12 \epsilon_0^2}{\pi} \sum_{t=0}^{\infty} (t+1)(t+2)(t+3) g_t(\kappa) \quad (3)$$

kde  $\kappa = \sqrt{2E}$  a

$$g_t(x) = \frac{x^4}{(tx-1)^2 [(t+1)x-1]^2 [(t+2)x-1]^3 [(t+3)x-1]^2 [(t+4)x-1]^2} \quad (4)$$

čo po rozklade do parciálnych zlomkov vyzerá nasledovne

$$\begin{aligned} g_t(x) = & (1-\delta_{t0}) \frac{t^3}{1152} \left[ \frac{1}{\left(x - \frac{1}{t}\right)^2} - \frac{(15+14t)t}{3} \cdot \frac{1}{x - \frac{1}{t}} \right] + \\ & + \frac{(t+1)^3}{36} \left[ \frac{1}{\left(x - \frac{1}{t+1}\right)^2} - \frac{[15+8(t+1)](t+1)}{3} \cdot \frac{1}{x - \frac{1}{t+1}} \right] + \\ & + \frac{t+2}{16} \left\{ \frac{1}{\left(x - \frac{1}{t+2}\right)^3} - 4(t+2) \frac{1}{\left(x - \frac{1}{t+2}\right)^2} + \right. \\ & \quad \left. + \left[ 10 + \frac{5}{2}(t+2)^2 \right] (t+2)^2 \frac{1}{x - \frac{1}{t+2}} \right\} - \\ & - \frac{(t+3)^3}{36} \left[ \frac{1}{\left(x - \frac{1}{t+3}\right)^2} - \frac{[15-8(t+3)](t+3)}{3} \cdot \frac{1}{x - \frac{1}{t+3}} \right] - \\ & - \frac{(t+4)^3}{1152} \left[ \frac{1}{\left(x - \frac{1}{t+4}\right)^2} - \frac{[15-14(t+4)](t+4)}{3} \cdot \frac{1}{x - \frac{1}{t+4}} \right] \quad (5) \end{aligned}$$

Od  $G^{(2)}$  ku  $M^{(2)}(\tau)$  možno prejsť inverznou Laplaceovou transformáciou; pomocou vzťahov z Dodatku G výjde

$$M^{(2)}(\tau) = M_0(\tau) \frac{1}{24} \varepsilon_0^2 \tau^3 \xi(\gamma), \quad (6)$$

pričom  $\xi(\gamma)$  udáva vzťah (8.40).

$\xi(\gamma)$  možno vyjadriť v tvare mocninného radu, ak použijeme vzťahy (H.12 a 13) a

$$\varphi_3(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i ; \quad c_i = \frac{(i+1)(i+3)}{4} A_i. \quad (7)$$

Ako výsledok dostaneme

$$\xi(\gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \gamma^i$$

$$c_i = \sqrt{\pi} C_i \sum_{t=0}^{\infty} (t+1)(t+2)(t+3).$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1-\delta_{t0}}{i+3} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{i+1} \left( 1 + \frac{7t}{3} \right) \right] \frac{1}{t^i} + \\ & + \frac{32}{i+3} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{i+1} \left( 1 + \frac{4(t+1)}{3} \right) \right] \frac{1}{(t+1)^i} + \\ & + \frac{72}{t+2} \left[ \frac{1}{4} - \frac{5}{4} \frac{1}{i+3} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{(i+1)(i+3)} \left( 1 + \frac{5}{2} (t+2)^2 \right) \right] \frac{1}{(t+2)^i} - \\ & - \frac{32}{i+3} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{i+1} \left( 1 - \frac{4(t+3)}{3} \right) \right] \frac{1}{(t+3)^i} - \\ & - \frac{1}{i+3} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{i+1} \left( 1 - \frac{7(t+4)}{3} \right) \right] \frac{1}{(t+4)^i} \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

Prvé dva koeficienty sú

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{7}{4} \sqrt{\pi} \quad (9)$$

ďalšie uvádza Tabuľka 8.3.

LITERATÚRA

- [1] H. Fritzsch, M. Gell-Mann v zborníku Proc. XVI Int. Conf. on High En. Physics, Vol.2. (Vyd. J. D. Jackson, A. Roberts.) NAL, Batavia 1972; str. 135.
- [2] M. B. Vološin: Vvedeniye v kvantovuju chromodinamiku, preprinty ITEF-22 (1980), ITEF-22 (1981) a ITEF-77 (1981).
- [3] M. B. Voloshin: Fundamentals and applications of QCD, prednášky na Škole mladých fyzikov SÚJV/CERN v Tábore (1983), výjde v zborníku.
- [4] F. Wilczek: Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 32 (1982), 177.
- [5] M. R. Pennington: Rep. Prog. Phys. 46 (1983), 393.
- [6] M. Gell-Mann: Phys. Lett. 8 (1964), 214.
- [7] G. Zweig: An SU(3) model for strong interaction symmetry breaking I, II, preprinty 8182/TH.401, 8419/TH.412-CERN (1964), reprintované v zborníku Developments in the Quark Theory of Hadrons. A Reprint Collection. Vol. I: 1964-1973. (Vyd. D. B. Lichtenberg, S. P. Rosen.) Hadronic Press, Nonantum 1980; str. 22.
- [8] M. Gell-Mann, Y. Ne'eman: The Eightfold Way. Benjamin, New York 1964.
- [9] O. W. Greenberg: Phys. Rev. Lett. 13 (1964), 598.
- [10] S. Coleman, D. J. Gross: Phys. Rev. Lett. 31 (1973), 851.
- [11] D. J. Gross, F. Wilczek: Phys. Rev. Lett. 30 (1973), 1343; Phys. Rev. D8 (1973), 3633.
- [12] H. D. Politzer: Phys. Rev. Lett. 30 (1973), 1346; Phys. Reports 14C (1974), 129.
- [13] N. K. Nielsen: Am. J. Phys. 49 (1981), 1171.
- [14] R. J. Hughes: Phys. Lett. 97B (1980), 246; Nucl. Phys. B186 (1981), 376.
- [15] K. Johnson v zborníku Asymptotic Realms of Physics.

(Vyd. A. Guth, K. Huang a R. L. Jaffe.) MIT Press, Cambridge 1983.

- [16] K. Huang: Quarks, Leptons, and Gauge Fields. World Scientific, Singapore 1982; kap. 12.3.
- [17] E. Reya: Phys. Reports 69 (1981), 195.
- [18] A. H. Mueller: Phys. Reports 73 (1981), 237.
- [19] G. Altarelli: Phys. Reports 81 (1982), 1.
- [20] A. J. Buras: Rev. Mod. Phys. 52 (1980), 199.
- [21] F. Dydak: Experimental tests of gauge theories, přednášky na Škole mladých fyziků SÚJV/CERN v Táboře (1983), výjde v zborníku.
- [22] J. Chýla: Čs. čas. fyz. A33 (1983), 321.
- [23] W. Bardeen, H. Fritzsch, M. Gell-Mann v zborníku Scale and Conformal Symmetry in Hadron Physics. (Vyd. R. Gatto.) Willey, New York 1973; str. 139.
- [24] W. Marciano, H. Pagels: Phys. Reports 36 (1978), 137.
- [25] M. Bander: Phys. Reports 75 (1981), 205.
- [26] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, Yu. S. Tyupkin: Phys. Lett. 59B (1975), 85.
- [27] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov: Nucl. Phys. B147 (1979), 385, 448, 519.
- [28] J. J. Aubert et al.: Phys. Rev. Lett. 33 (1974), 1404.
- [29] J. E. Augustin et al.: Phys. Rev. Lett. 33 (1974), 1406.
- [30] S. W. Herb et al.: Phys. Rev. Lett. 39 (1977), 252.
- [31] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, J. Kogut, K. D. Lane, T.-M. Yan: Phys. Rev. Lett. 34 (1975), 369.
- [32] M. B. Voloshin: Nucl. Phys. B154 (1979), 365; Jad. fiz. 36 (1982), 247.
- [33] H. Leutwyler: Phys. Lett. 98B (1981), 447.

- [34] A. W. Hendry, D. B. Lichtenberg: Properties of hadrons in the quark model, preprint IUHET 92 (1984).
- [35] K. Zalewski: Acta Phys. Pol. B14 (1983), 911.
- [36] R. K. Bock (UA1 Collaboration): Experimental search for the process  $W \rightarrow t\bar{b}$ , prednáška na XXII. medzinárodnej konferencii o fyzike vysokých energií v Lipsku (júl 1984).
- [37] CERN Courier 24 (1984), 263.
- [38] C. Itzykson, J.-B. Zuber: Quantum Field Theory. McGraw-Hill, New York 1980.
- [39] C. N. Yang, R. L. Mills: Phys. Rev. 96 (1954), 191.
- [40] S. Mandelstam: Phys. Reports 67 (1980), 109.
- [41] R. P. Feynman: Nucl. Phys. B188 (1981), 479; príspevok v zborníku konferencie EPS o fyzike vysokých energií v Lisabone (1981).
- [42] Š. Olejník: Neporuchový prístup ku kvantovej chromodynamike v Schrödingerovej reprezentácii, písomná práca k odbornej ašpirantskej skúške, FÚ CEFV SAV (1982).
- [43] Š. Olejník: Čs. čas. fyz. A33 (1983), 352.
- [44] E. Bloom: J. Phys. (Paris) 43 (1982), C3-407.
- [45] D. Hitlin v zborníku Proc. 1983 Int. Symp. on Lepton and Photon Interactions at High Energies. (Vyd. D. G. Cassel, D. L. Kreinick.) Cornell Univ., Ithaca 1983; str. 746.
- [46] S. J. Lindenbaum: Surveys in High En. Phys. 4 (1983), 69.
- [47] S. R. Sharpe: Glueballs: A status report on the theory, preprint HUTP-84/A029 (1984).
- [48] J. Greensite: Nucl. Phys. B158 (1979), 469.
- [49] R. P. Feynman, A. R. Hibbs: Quantum Mechanics and Path Integrals. McGraw-Hill, New York 1965.
- [50] G. 't Hooft: v zborníku Gauge Theories and Experi-

- ments at High Energies. (Vyd. K. C. Bowler, D. G. Sutherland.) SUSSP, Edinburgh 1981; str. 337.
- [51] P. Olesen: Phys. Scripta 23 (1981), 1000.
- [52] T. H. Hansson, K. Johnson, C. Peterson: Phys. Rev. D26 (1982), 2069.
- [53] M. Gell-Mann, R. Oakes, B. Renner: Phys. Rev. 175 (1968), 2195.
- [54] A. DiGiacomo: Direct determination of vacuum condensate parameters, preprint IFUP TH 39/83 (1983), výjde v zborníku konferencie Hadron Structure '83 v Smoleniciach.
- [55] G. H. Trilling: Phys. Reports 75 (1981), 57.
- [56] P. Franzini, J. Lee-Franzini: Phys. Reports 81 (1982), 240.
- [57] K. Berkelman: Phys. Reports 98 (1983), 145; v zborníku Proc. 9<sup>th</sup> Topical Conf. in Particle Physics. (Vyd. R. J. Cence, E. Ma.) Univ. of Hawaii Press, Honolulu 1983.
- [58] M. G. B. Gilchriese v zborníku Dynamics and Spectroscopy at High Energies. (Vyd. P. M. McDonough.) SLAC Report 267, Stanford 1984; str. 191.
- [59] J. L. Rosner: Progress in the description of heavy quarkonium, preprint EFI 83/17 (1983).
- [60] P. M. Tuts v zborníku citovanom v [45]; str. 284.
- [61] V. A. Choze, M. A. Šifman: Usp. fiz. nauk 140 (1982), 3.
- [62] C. Quigg: Acta Phys. Pol. B15 (1984), 53.
- [63] D. J. Olivier: Introduction a la physique du quarkonium, preprint PAR LPTHE 84/1 (1984).
- [64] M. E. Peskin v zborníku citovanom v [58]; str. 151.
- [65] E. Eichten v zborníku citovanom v [58]; str. 497.
- [66] J.-M. Richard: Recent developments in heavy quark spectroscopy, preprint Aarhuskej univerzity (1984).



- [67] A. Silverman: Heavy quark spectroscopy and search for new particles, prednáška na XXII. medzinárodnej konferencii o fyzike vysokých energií, Lipsko (júl 1984).
- [68] W. Buchmüller: Quarkonium spectroscopy, preprint CERN-TH.3938/84 (1984).
- [69] C. Bacci et al.: Phys. Rev. Lett. 33 (1974), 1408.
- [70] J. E. Augustin et al.: Phys. Rev. Lett. 33 (1974), 1453.
- [71] T. Appelquist, H. D. Politzer: Phys. Rev. Lett. 34 (1975), 43.
- [72] C. G. Wohl et al. (Particle Data Group): Rev. Mod. Phys. 56 (1984), S1.
- [73] H.-J. Behrend et al. (CELLO Collaboration): Phys. Lett. 144B (1984), 297.
- [74] A. A. Bykov, I. M. Drjomin, A. V. Leonidov: Usp. fiz. nauk 143 (1984), 3.
- [75] C. Quigg, J. L. Rosner: Phys. Reports 56 (1979), 167.
- [76] H. Grosse, A. Martin: Phys. Reports 60 (1980), 341.
- [77] D. Adamová: Potenciálové modely pro těžká kvarkonia, písomná práca k odbornej aspirantskej skúške, NC MFF UK (1982).
- [78] K. G. Wilson: Phys. Rev. D10 (1974), 2445.
- [79] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, T.-M. Yan: Phys. Rev. D17 (1978), 3090; *ibid.* D21 (1980), 203.
- [80] G. Bhanot, S. Rudaz: Phys. Lett. 78B (1978), 119.
- [81] J. L. Richardson: Phys. Lett. 82B (1979), 272.
- [82] W. Buchmüller, G. Grunberg, S.-H. H. Tye: Phys. Rev. Lett. 45 (1980), 103; *ibid.* 45 (1980), 587 (E).
- [83] I. M. Drjomin, A. V. Leonidov: Teor. mat. fiz. 51 (1982), 178.
- [84] C. Quigg, J. L. Rosner: Phys. Lett. 71B (1978), 153.
- [85] A. Martin: Phys. Lett. 93B (1980), 338.

- [86] W. Buchmüller, S.-H. H. Tye: Phys. Rev. D24 (1981), 132.
- [87] C. Quigg, J. L. Rosner: Phys. Lett. 72B (1978), 462.
- [88] E. Kovacs v zborníku New Flavors and Hadron Spectroscopy. (Vyd. J. Trân Thanh Vân.) Editions Frontieres, Dreux 1981; Phys. Rev. D25 (1982), 871, 3312.
- [89] J. D. Stack: Phys. Rev. D27 (1983), 412; *ibid.* D29 (1984), 1213; v zborníku Gauge Theory on a Lattice: 1984. (Vyd. C. Zachos, W. Celmaster, E. Kovacs, D. Sivers.) ANL CONF-8404119, Argonne 1984; str. 131.
- [90] F. Gutbrod, I. Montvay: Phys. Lett. 136B (1984), 411.
- [91] D. Barkai, M. Creutz, K. J. M. Moriarty: Phys. Rev. D29 (1984), 1207.
- [92] D. Barkai, K. J. M. Moriarty, C. Rebbi: The force between static quarks, preprint BNL-34462 (1984); Force between static charges and universality in lattice QCD, preprint BNL-34923 (1984).
- [93] S. W. Otto, J. D. Stack: The SU(3) heavy quark potential with high statistics, preprint CALT-68-1113 (1984).
- [94] G. Curci, G. Paffuti, R. Tripicciono: Scaling behaviour of SU(3) gauge theory, preprint IFUP-TH 15/84 (1984).
- [95] J. B. Kogut: Rev. Mod. Phys. 55 (1983), 775.
- [96] C. Rebbi: Lattice Gauge Theories and Monte Carlo Simulations. World Scientific, Singapore 1983.
- [97] M. Creutz, L. Jacobs, C. Rebbi: Phys. Reports 95 (1983), 203.
- [98] M. Campostrini: Quarkonia spectra from lattice gauge theories, preprint BNL-34994 (1984).
- [99] R. Slansky: Phys. Reports 79 (1981), 1 (Table 24).
- [100] V. N. Baier, Yu. F. Pinelis: Phys. Lett. 116B (1982), 179; Small-size vacuum fluctuations and QCD sum rules, novosibirský preprint 82-115 (1982); Phys. Lett.

139B (1984), 411.

- [101] M. Campostrini, A. DiGiacomo, G. Mussardo: Correlation length of the vacuum condensate in lattice gauge theories, preprint IFUP TH 6/84 (1984).
- [102] A. Soni, M. D. Tran: Phys. Lett. 109B (1982), 393.
- [103] C. A. Flory: Phys. Lett. 113B (1982), 263.
- [104] J. S. Bell: osobný rozhovor (jún 1983).
- [105] R. A. Bertlmann, J. S. Bell: Nucl. Phys. B227 (1983), 435.
- [106] R. Meckbach: Gluon condensate and  $q\bar{q}$  static potential, preprint MPI-PAE/PTh 36/83 (1983); Gluon vacuum fluctuations and static quark-antiquark potential (1983), výjde v zborníku konferencie Hadron Structure '83 v Smoleniciach.
- [107] K. Gottfried v zborníku Proc. of the EPS Conf. on High Energy Physics, Brighton 1983. (Vyd. J. Guy, C. Costain.) RAL, Chilton 1984; str. 284.
- [108] P. Kubinec (školiteľ Š. Olejník): Metóda na výpočet energetických hladín ťažkých kvarkónií a jej aplikácie, práca ŠVOČ, MFF UK, Bratislava (1983).
- [109] J. S. Bell, R. A. Bertlmann: Nucl. Phys. B187 (1981), 285.
- [110] S. Jacobs, M. G. Olsson: Phys. Lett. 133B (1983), 111.
- [111] M. B. Vološin: Jad. fiz. 35 (1982), 1016.
- [112] A. Ju. Morozov: Jad. fiz. 36 (1982), 1302.
- [113] G. Curci, A. DiGiacomo, G. Paffuti: Z. Phys. C18 (1983), 135.
- [114] K. Gottfried: Phys. Rev. Lett. 40 (1978), 598.
- [115] M. Peskin: Nucl. Phys. B156 (1979), 365.
- [116] T.-M. Yan: Phys. Rev. D22 (1980), 1652.
- [117] K. Shizuya: Phys. Rev. D23 (1981), 1180.
- [118] M. V. Terentjev: Jad. fiz. 34 (1981), 1612.

- [119] Š. Olejník: An approach to the calculation of non-perturbative energy-level shifts in heavy quarkonia. Description of the method, *Acta Phys. Slov.* 34 (1984), 241.
- [120] Š. Olejník: Gluon condensate effects on levels and widths of heavy quarkonia, preprint FÚ CEFV SAV (1983), výjde v zborníku konferencie Hadron Structure '83 v Smoleniciach.
- [121] J. Formánek: Úvod do kvantové teorie. Academia, Praha 1983.
- [122] Handbook of Mathematical Functions. (Vyd. M. Abramowitz, I. Stegun.) Dover, New York 1970.
- [123] J. Pišút, L. Gomolčák, V. Černý: Úvod do kvantovej mechaniky. ALFA, Bratislava 1983.
- [124] D. A. Varšalovič, A. N. Moskalev, V. K. Chersonskij: Kvantovaja teorija uglovogo momenta. Nauka, Leningrad 1975; vzťah (5.10).
- [125] A. Messiah: Quantum Mechanics, Vol.2. North Holland, Amsterdam 1961; Dodatok C.
- [126] Š. Olejník: An approach to the calculation of non-perturbative energy-level shifts in heavy quarkonia. A critical appraisal, preprint FÚ CEFV SAV (1984), výjde v zborníku XV. jarného sympózia o fyzike vysokých energií v Georgenthale (NDR).
- [127] Š. Olejník: On the influence of the QCD vacuum structure on heavy quarkonium spectra, *Acta Phys. Pol.* B16 (1985), v tlači.
- [128] A. Zalewska, K. Zalewski: *Phys. Lett.* 125B (1983), 89; *Z. Phys.* C23 (1984), 233.
- [129] L. J. Reinders: *Phys. Lett.* 127B (1984), 254.
- [130] S. N. Nikolaev, A. V. Radyushkin: *Phys. Lett.* 124B (1983), 242; *Pis'ma v ŽETF* 37 (1983), 526; *Jad. fiz.* 39 (1984), 147.
- [131] E. V. Shuryak: *Phys. Lett.* 136B (1984), 269.

- [132] J. S. Bell, R. A. Bertlmann: Phys. Lett. 137B (1984), 107.
- [133] L. J. Reinders, H. Rubinstein, S. Yazaki: Phys. Lett. 138B (1984), 425.
- [134] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, M. B. Voloshin, V. I. Zakharov: Nucl. Phys. B237 (1984), 525.
- [135] H. G. Dosch: The gluon condensate and effective non-relativistic potentials, preprint MIT CTP 972 (1982).
- [136] D. Gromes: Phys. Lett. 115B (1982), 482.
- [137] A. DiGiacomo: osobné zdelenie v liste J. Pišútovi (1984).
- [138] V. A. Novikov, L. B. Okun, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, M. B. Voloshin, V. I. Zakharov: Phys. Reports 41C (1978), 1.
- [139] A. I. Vajnštejn, M. B. Vološin, V. I. Zacharov, V. A. Novikov, L. B. Okuň, M. A. Šifman: Usp. fiz. nauk 123 (1977), 217.
- [140] L. J. Reinders: Acta Phys. Pol. B15 (1984), 329.
- [141] E. de Rafael: Some comments on QCD sum rules, marseilleský preprint CPT-84/P.1587 (1984).
- [142] L. J. Reinders, H. Rubinstein, S. Yazaki: QCD spectroscopy and couplings with sum rules: An overview, preprint TH.3767-CERN (1983). *Phys. Reports* 127 (85) 1-97
- [143] M. A. Shifman: Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 33 (1983), 199.
- [144] K. G. Wilson: Phys. Rev. 179 (1969), 1499.
- [145] W. Zimmermann v zborníku Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory. Vol. 1. (Vyd. S. Deser, M. Grisaru, H. Pendleton.) MIT Press, Cambridge 1970.
- [146] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov: Nucl. Phys. B174 (1980), 378.
- [147] F. David: Nucl. Phys. B209 (1982), 433; *ibid.* B234 (1984), 237.

- [148] S. Gupta, H. R. Quinn: Phys. Rev. D26 (1982), 499; ibid. D27 (1983), 980.
- [149] C. Taylor, B. McClain: Phys. Rev. D28 (1983), 1364.
- [150] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov: Wilson's operator expansion: can it fail?, preprint ITEP-71 (1984).
- [151] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov: Calculations in external fields in quantum chromodynamics. Technical review, preprint ITEP-140 (1983), výjde vo Fortschritte der Physik.
- [152] A. I. Vajňštejn, V. I. Zacharov, V. A. Novikov, M. A. Šifman: Jad. fiz. 39 (1984), 124.
- [153] P. Lichard, J. Pišút, P. Prešnajder: Reprezentácia dát analytickými funkciami vo fyzike. Veda, Bratislava 1983.
- [154] E. C. Poggio, H. R. Quinn, S. Weinberg: Phys. Rev. D13 (1976), 1958.
- [155] K. Chetyrkin, N. Krasnikov, A. Tavkhelidze: Phys. Lett. 76B (1978), 83.
- [156] R. A. Bertlmann, G. Launer, E. de Rafael: Gaussian sum rules in quantum chromodynamics and local duality, marseilleský preprint CPT-84/P.1586 (1984).
- [157] J. Fischer: On QCD sum rules and asymptotic expansions, prejav na konferencii Hadron Structure '84 v Smoleniciach (1984).
- [158] L. J. Reinders, H. R. Rubinstein, S. Yazaki: Nucl. Phys. B196 (1982), 125.
- [159] T. M. Aliev, M. A. Shifman: Phys. Lett. 112B (1982), 401.
- [160] L. J. Reinders, H. R. Rubinstein, S. Yazaki: Nucl. Phys. B186 (1981), 109.
- [161] M. B. Vološin: Jad. fiz. 29 (1979), 1368.
- [162] M. B. Voloshin: Non-relativistic bottonium in the physical vacuum of QCD. Mass of the 1P level, preprint

ITEP-21 (1980).

- [163] L. J. Reinders, H. R. Rubinstein, S. Yazaki: Phys. Lett. 104B (1981), 305.
- [164] B. L. Ioffe: Nucl. Phys. B188 (1981), 317; *ibid.* B191 (1981), 591 (E).
- [165] Y. Chung, H. G. Dosch, M. Kremer, D. Schall: Phys. Lett. 102B (1981), 175; Nucl. Phys. B197 (1982), 55.
- [166] D. Espriu, P. Pascual, R. Tarrach: Nucl. Phys. B214 (1983), 285.
- [167] V. M. Beljajev, B. L. Ioffe: Z. exp. teor. fiz. 83 (1982), 876.
- [168] B. L. Ioffe, A. V. Smilga: Pis'ma v ZETF 37 (1983), 298; *ibid.* 38 (1983), 48 (E); Nucl. Phys. B232 (1984), 109.
- [169] V. M. Belyaev, Ya. I. Kogan: Nucleon magnetic form-factors in QCD at  $0 \leq Q^2 \leq 1 \text{ GeV}^2$ , preprint ITEP-29 (1984).
- [170] L. J. Reinders, H. R. Rubinstein, S. Yazaki: Phys. Lett. 120B (1983), 209.
- [171] E. V. Shuryak: Nucl. Phys. B198 (1982), 83.
- [172] I. I. Balitsky, D. I. Dyakonov, A. V. Yung: Phys. Lett. 112B (1982), 71; Jad. fiz. 35 (1982), 761.
- [173] J. Govaerts, F. de Viron, D. Gusbin, J. Weyers: Phys. Lett. 128B (1983), 262; QCD sum rules and hybrid mesons, preprint TH.3823-CERN (1984).
- [174] A. I. Vajnštejn, V. I. Zacharov, V. A. Novikov, M. A. Šifman: Jad. fiz. 32 (1980), 1622.
- [175] A. A. Bykov, I. M. Drjomin, A. V. Leonidov: Jad. fiz. 39 (1984), 977.
- [176] R. Van Royen, V. F. Weisskopf: Nuovo Cim. 50 (1967), 617; *ibid.* 51 (1967), 583.
- [177] C. Quigg: Models for hadrons, preprint FERMILAB-Conf-81/78-THY (1981), problém 13.

- [178] Z. A. Melzak: Amer. Math. Monthly 58 (1951), 636, problém 4458, citované podľa J. Kaucký: Kombinatorické identity. Veda, Bratislava 1975, vzťah 9.1.92.
- [179] G. A. Korn, T. M. Korn: Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. 2<sup>nd</sup> Ed. McGraw-Hill, New York 1968; kap. 8.
- [180] J. B. Whitenton, B. Durand, L. Durand: Phys. Rev. D28 (1983), 597.
- [181] J. Schwinger: Particles, Sources, and Fields. Vol. II. Addison-Wesley, Reading 1973.
- [182] A. D. Dolgov, A. V. Turbiner: Phys. Lett. 77A (1980), 15.
- [183] A. V. Turbiner: Kvantovaja mechanika: novyj vzgljad na staruju teoriju vozmuščenij, preprint ITEF-24 (1982).
- [184] M. Hehenberger, H. V. McIntosh, E. Brandäs: Phys. Rev. A10 (1974), 1494.
- [185] R. J. Damburg, V. V. Kolosov: J. Phys. 9B (1976), 3149.
- [186] I. Novák, Š. Olejník: pripravovaný článok (1984).
- [187] K. Zalewski: SVZ approach to an elementary but instructive quantum-mechanical problem, preprint TPJU-21/83 (1983), výjde v zborníku konferencie Hadron Structure '83 v Smoleniciach.
- [188] H. A. Bethe, E. E. Salpeter: Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Systems. Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.