

ELEKTROMAGNETICKÝ CASIMIROV JAV

LADISLAV ŠAMAJ^{*)}, Fyzikálny ústav SAV,
Dúbravská cesta 9, SK-845 11 Bratislava

V roku 1948 holandský fyzik H. B. G. Casimir navrhol špeciálne experimentálne zariadenie, ktoré spočívalo v dvojici rovnobežných vodivých platní, pričom každá z platin bola elektricky neutrálna. Casimir vypočítal, že zmena vákuovej energie elektromagnetického poľa spôsobená prítomnosťou platin sa prejavuje ako makroskopická príťažlivá sila medzi platňami. Ďalšie štúdie zovšeobecni, v rámci štandardnej rovnovážnej štatistickej a kvantovej mechaniky aplikovanej na makroskopickú elektrodynamiku, odvodenie príťažlivej Casimirovej sily na nenulovú teplotu $T > 0$, prípad všeobecných platin vyrobených z dielektrického materiálu a rôzne geometrie experimentálnych zariadení. Časom sa ukázalo, že v dosiahnutých výsledkoch je nesúlad a množstvo kontroverzií. Nesúlad výsledkov sa najmarkantnejšie prejavuje v oblasti vysokých teplôt. Cieľom prezentovaného článku je poskytnúť stručný prehľad vývoja Casimirovho problému a jeho kontroverzií v matematicky prístupnej forme, ako aj autorov príspevok pri objasnení vysokoteplotných aspektov elektromagnetického Casimirovho javu.

Úvod

Priestor vesmíru je vyplnený elektromagnetickým (EM) žiarením. Keďže energia EM poľa je určená štvorcami intenzity elektrického poľa a magnetickej indukcie, po kanonickej transformácii je možné priradiť ku každému módu poľa harmonický oscilátor. Podľa elementárnej kvantovej mechaniky je energetické spektrum harmonického oscilátora s frekvenciou ω diskrétné,

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (1)$$

$\hbar \approx 1,055 \times 10^{-34}$ Js označuje Planckovu konštantu. Energia $\hbar\omega/2$ základného $n = 0$ stavu je nenulová vďaka Heisenbergovmu princípu neurčitosti. Úroveň $n = 1, 2, \dots$ excitovaného stavu harmonického oscilátora (1) je v kvantovej teórii EM poľa identifikovaná s počtom fotónov s danou frekvenciou ω a energiou $\hbar\omega$ na fotón.

Uvažujme vesmír pri teplote absolútnej nuly, t.j. $T = 0$ K. Lubovoľný kvantový systém sa realizuje pri nulovej teplote v základnom (vákuovom) stave s najnižšou energiou. V prípade EM poľa sa systém nezávislých harmonických oscilátorov realizuje v stave s nulovým počtom fotónov pre každý mód, s celkovou energiou danou súčtom energií základného stavu $\hbar\omega/2$ všetkých módov. Energia základného stavu EM poľa je referenčná, a teda nemerateľná pre pozorovateľa.

V roku 1948 holandský fyzik H. B. G. Casimir navrhol vo svojom slávnom článku [1] špeciálne experimentálne zariadenie, ktoré spočívalo v dvojici rovnobežných vodivých platin, pričom každá z platin bola elektricky neutrálna. Casimir vypočítal, že zmena vákuovej energie EM poľa spôsobená prítomnosťou platin sa prejavuje ako makro-

skopická príťažlivá sila medzi platňami.

Chcel by som upozorniť čitateľa na to, že pojem Casimirov jav/sila sa používa v mnohých oblastiach fyziky, ako je teória elementárnych častíc, kozmológia, kritické javy atď. Vo všeobecnosti je Casimirov jav definovaný ako zmena vákuovej energie systému spôsobená vonkajšími obmedzeniami. V tomto článku sa sústreďujem výlučne na načrtnutý EM Casimirov jav.

Existuje aj mechanická analógia Casimirovho javu. Predstavme si dve lode na vlniacom sa mori vo vzdialenosti L . Keby sme vypočítali celkovú energiu stojatých vln medzi loďami, zistili by sme, že táto energia klesá pri znižovaní L , t.j. lode sa navzájom priťahujú a po dostatočne dlhom čase sa zrazia. V Casimirovom experimente úlohu lodí hrajú vodivé platne, zatiaľ čo úlohu sprostredkovateľa (vlniace sa more) hrá EM žiarenie.

Casimirov článok [1] inšpiroval stovky ďalších štúdií renomovaných fyzikov ako E. M. Lifšic, J. Schwinger a ďalší. Tieto štúdie zovšeobecni, v rámci štandardnej rovnovážnej štatistickej a kvantovej mechaniky aplikovanej na makroskopickú elektrodynamiku, odvodenie príťažlivej Casimirovej sily na nenulovú teplotu $T > 0$, prípad všeobecných platin vyrobených z dielektrického materiálu a rôzne geometrie experimentálnych zariadení. V širších súvislostiach sa ukazuje, že úplné pochopenie Casimirovho javu je nevyhnutným predpokladom pre správny popis kvantovej interakcie EM žiarenia a hmoty, ktoré sú v tepelnej rovnováhe.

Časom sa v dosiahnutých výsledkoch začali prejavovať kontroverzie. Nesúlad výsledkov sa najmarkantnejšie prejavuje v oblasti vysokých teplôt. Napriek takmer 60-tim rokom intenzívneho výskumu EM Casimirov jav stále nie je uzavretou témou. V poslednom čase bolo o ňom napísaných

^{*)} E-mail: Ladislav.Samaj@savba.sk

viacero kníh [2, 3] a prehľadových článkov [4, 5]. Cieľom tohto článku je poskytnúť stručný prehľad vývoja Casimirovho problému a jeho kontroverzií v matematicky prístupnej forme, ako aj autorov príspevok pri objasnení vysokoteplotných aspektov EM Casimirovho javu.

EM ŽIARENIE MEDZI PLATŇAMI

Uvažujme dve identické vodivé platne v reálnom trojrozmernom priestore bodov $\mathbf{r} = (x, y, z)$, zobrazené na obr. 1. Platne sú rovnobežné s rovinou yz , ich vzájomná vzdialenosť L v x -ovom smere je podstatne menšia ako rozmery platní L_y a L_z . V prázdnej oblasti medzi platňami Λ sa nachádza EM žiarenie, ktorého komponenta intenzity elektrického poľa $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ spĺňa Maxwellove rovnice (v Gausso-vých jednotkách)

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0; \quad (2)$$

$c \approx 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ označuje rýchlosť svetla. Keďže platne sú vyrobené z ideálneho vodiča, okrajová podmienka na povrchu platní zodpovedá nulovosti tangenciálnych (vzhľadom k povrchu platní) komponent intenzity elektrického poľa:

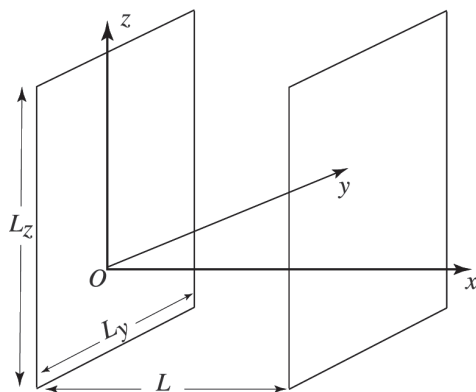
$$E_y(\mathbf{r}, t) = E_z(\mathbf{r}, t) = 0; \quad x = 0, L. \quad (3)$$

Všimnime si, že táto matematická definícia ideálneho vodiča je založená na makroskopickkej elektrostati-ke: elektrické pole vo vnútri vodiča je považované za nulové, bez akýchkoľvek fluktuácií. Vodič nemá žiadnu mikroskopickú štruktúru a pôsobí iba na zafixovanie okrajovej podmienky typu (3). Takýto matematický model ideálneho vodiča budem nazývať „inertným“.

Časová závislosť riešení Maxwellových rovníc (2) sa predpokladá v periodickom tvare

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re e [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}]. \quad (4)$$

Priestorová závislosť riešení je vyjadriteľná pomocou vlnového vektora $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, súvisiaceho s frekvenciou vlny ω cez disperzný vzťah



1 Konfigurácia ideálne vodivých platní navrhnutá Casimirom

$$\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}| = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}, \quad (5)$$

a polarizačných indexov $\lambda = 1, 2$ nasledovne

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = E_{\mathbf{k}, \lambda} N e^{i(k_y y + k_z z)} \begin{cases} e_x(\lambda) \cos(k_x x) \\ e_y(\lambda) \sin(k_x x) \\ e_z(\lambda) \sin(k_x x) \end{cases}; \quad (6)$$

$E_{\mathbf{k}, \lambda}$ je komplexná amplitúda, $N = \sqrt{8/|\Lambda|}$ s $|\Lambda| = LL_y L_z$ je normalizačný faktor a $\mathbf{e}(\lambda)$ ($\lambda = 1, 2$) sú dva polarizačné jednotkové vektory ortogonálne k vlnovému vektoru \mathbf{k} , t.j. $\mathbf{e}(\lambda) \cdot \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{e}(\lambda) \cdot \mathbf{e}(\lambda') = \delta_{\lambda\lambda'}$. Okrajové podmienky (3) fixujú x -komponenty vlnového vektora stojatých vln

$$k_x = \frac{\pi n_x}{L}, \quad n_x = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

V asymptotickej limite $L_y, L_z \rightarrow \infty$ výsledky nezávisia od výberu okrajových podmienok v smeroch osí y a z , a preto v týchto smeroch uvažujeme pre jednoduchosť periodické okrajové podmienky:

$$(k_y, k_z) = \left(\frac{2\pi n_y}{L_y}, \frac{2\pi n_z}{L_z} \right), \quad n_y, n_z \in Z. \quad (8)$$

Z tvaru riešenia (6) je zrejmé, že pre $n_x = 0$ ($k_x = 0$) je vektor elektrickej intenzity nutne orientovaný v jednom smere, a teda existuje len jeden možný polarizačný stav. Zodpovedajúca magnetická indukcia $\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega)$ EM poľa je určená rovnicou

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = -i \frac{c}{\omega} \nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (9)$$

kde symbol \wedge označuje vektorový súčin.

Klasická energia EM poľa v oblasti Λ pre daný mód (\mathbf{k}, λ) je určená vzťahom

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \int_{\Lambda} d\mathbf{r} [|\Re e \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)|^2 + |\Re e \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega)|^2] \\ = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{E_{\mathbf{k}, \lambda}^* E_{\mathbf{k}, \lambda} + E_{\mathbf{k}, \lambda} E_{\mathbf{k}, \lambda}^*}{2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Kvantovanie EM poľa spočíva v štandardnom nahradení klasických amplitúd

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{k}, \lambda} &\rightarrow (\sqrt{8\pi\hbar\omega_{\mathbf{k}}}) a_{\mathbf{k}, \lambda}, \\ E_{\mathbf{k}, \lambda}^* &\rightarrow (\sqrt{8\pi\hbar\omega_{\mathbf{k}}}) a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \end{aligned} \quad (11)$$

bezrozmernými anihilačnými a kreačnými operátormi fotónov splňujúcimi bozónové komutačné vzťahy $[a_{\mathbf{k}, \lambda}, a_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'}$. Takto kvantová energia módu má tvar energie harmonického oscilátora,

$$\begin{aligned} H_{\Lambda, \mathbf{k}, \lambda} &= \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(\frac{a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}, \lambda} + a_{\mathbf{k}, \lambda} a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger}{2} \right) \\ &= \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}, \lambda} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Celková kvantová energia EM poľa v oblasti medzi platňami Λ je výsledkom sumácie cez všetky módy,

$$H_\Lambda = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}, \lambda} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar \omega_{\mathbf{k}}. \quad (13)$$

CASIMIROV JAV PRE $T = 0$

Energia EM poľa v oblasti Λ pri teplote $T = 0$ je energiou základného stavu Hamiltoniánu (13),

$$E_\Lambda^0 = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} E_0(\omega_{\mathbf{k}}), \quad E_0(\omega) = \frac{1}{2} \hbar \omega. \quad (14)$$

Hoci táto suma diverguje, existuje viacero spôsobov ako ju regularizovať. Prezentovaná regularizácia je motivovaná fyzikálnou stránkou problému. Ideálny vodič má statickú dielektrickú konštantu $\epsilon = \infty$. Reálny vodič je charakterizovaný frekvenčne závislou dielektrickou funkciou $\epsilon(\omega)$ takou, že $\epsilon(\omega) \rightarrow \infty$ pre $\omega \rightarrow 0$ a $\epsilon(\omega)$ ide k vákuovej hodnote $\epsilon_0 = 1$ pre $\omega \gg \omega_c$ (t.j. vodivý materiál platní sa stáva dielektrickým a priehľadným pre žiarenie), kde ω_c je charakteristická frekvencia. Inými slovami, vysoké frekvencie EM poľa neprispievajú k energii základného stavu E_Λ^0 . Z tohto dôvodu je možné zaviesť v rovnici (14) regularizačnú funkciu $\chi(\omega/\omega_c)$ takú, že $\chi(0) = 1$ a $\chi(\omega/\omega_c) \rightarrow 0$ pre $\omega \rightarrow \infty$,

$$E_\Lambda^0 = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} E_0(\omega_{\mathbf{k}}) \chi\left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\omega_c}\right). \quad (15)$$

Regularizačná funkcia bude odstránená na konci výpočtu uvažovaním limity ideálneho vodiča $\omega_c \rightarrow \infty$, pre ktorú $\chi(\omega_{\mathbf{k}}/\omega_c) \rightarrow 1$ pre všetky konečné hodnoty $\omega_{\mathbf{k}}$.

Pretože uvažujeme platne veľkých rozmerov a plochy $S = L_y L_z \rightarrow \infty$, sumácia cez vlnové vektory $\mathbf{q} = (k_y, k_z)$ (8) môže byť nahradená zodpovedajúcim integrálom. Keďže vzdialenosť platní L zostáva konečná, komponenta k_x nadobúda diskretné hodnoty (7). Používajúc označenie $n_x \equiv n$, platí

$$\sum_{\mathbf{k}, \lambda} \dots = 2 \frac{S}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 q \dots, \quad (16)$$

kde čiarka v sumácii cez n znamená, že mód $n = 0$, pre ktorý je možná len jedna polarizácia, je váhový faktorom 1/2. Následne,

$$E_\Lambda^0 = \frac{S}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 q E_0[\omega_n(q)] \chi\left(\frac{\omega_n(q)}{\omega_c}\right), \quad (17)$$

kde

$$\omega_n(q) = c \left(\frac{\pi^2 n^2}{L^2} + q^2 \right)^{1/2}. \quad (18)$$

Pre každé n , integrácia v polárnych súradniciach vlnového vektora \mathbf{q} môže byť nahradená integráciou

cez $\omega_n(q) = \omega$ s výsledkom

$$E^0(L) = S \frac{1}{\pi c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\omega_n} d\omega \omega E_0(\omega) \chi\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right), \quad (19)$$

kde $\omega_n \equiv \omega_n(0) = \pi c n / L$. Zodpovedajúca sila na jednotku plochy ľubovoľnej z platní (tlak)

$$f^0(L) = - \frac{\partial}{\partial L} \left[\frac{E^0(L)}{S} \right] \quad (20)$$

je potom vyjadrená nasledovne

$$f^0(L) = - \frac{\pi^2 \hbar c}{2L^4} \sum_{n=0}^{\infty} g(n), \quad g(n) = n^3 \chi\left(\frac{\omega_n}{\omega_c}\right), \quad (21)$$

V limite $L \rightarrow \infty$, $\omega_n \propto n/L$ je spojitou premennou a sumácia cez n môže byť nahradená integráciou:

$$f^0(L \rightarrow \infty) = - \frac{\pi^2 \hbar c}{2L^4} \int_0^\infty dn g(n). \quad (22)$$

Aby sme zistili celkovú silu pôsobiacu na systém platní, musíme zohľadniť aj opačne orientovanú silu, ktorou pôsobí nekonečné EM vákuum z vonkajšej strany platňového kondenzátora. Táto sila je presne opačná ako tá v rovnici (22), a teda výsledná sila $\bar{f}^0(L) = f^0(L) - f^0(L \rightarrow \infty)$:

$$\bar{f}^0(L) = - \frac{\pi^2 \hbar c}{2L^4} \left[\sum_{n=0}^{\infty} g(n) - \int_0^\infty dn g(n) \right], \quad (23)$$

Pre výpočet rozdielu medzi sumou a jej priradeným integrálom použijeme Eulerovu–MacLaurinovú formulu

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} g(n) - \int_0^\infty dn g(n) \\ &= - \frac{1}{12} g'(0) + \frac{1}{6!} g'''(0) + O[g^{[5]}(0)]. \end{aligned} \quad (24)$$

Keďže z definície $g(n)$ v rovnici (21) vyplýva $g'(0) = 0$, $g'''(0) = 6\chi(0) = 6$ a $g^{[p]}(0) = O(\omega_c^{-(p-3)})$ pre $p \geq 5$, v limite ideálneho vodiča $\omega_c \rightarrow \infty$, dostaneme

$$\bar{f}^0(L) = - \frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{L^4}. \quad (25)$$

Odpovedajúca vákuová energia na jednotku plochy ľubovoľnej z platní, normalizovaná na 0 pre $L \rightarrow \infty$, môže byť získaná pomocou vzťahu (20) jednoduchou integráciou cez vzdialenosť L ,

$$\frac{1}{S} \bar{E}^0(L) = - \frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c}{L^3}. \quad (26)$$

Keďže vákuová energia klesá so znižovaním

vzdialenosti medzi platňami L , Casimirova sila (25) je príťažlivá.

Dôležitou vlastnosťou Casimirovej sily (25) je jej univerzálnosť, t.j. nezávislosť od mikroskopického zloženia vodivých platní. Kvantové a relativistické efekty sa prejavujú v zodpovedajúcich univerzálnych konštantách \hbar a c . Závislosť Casimirovej sily od \hbar , c a L môže byť zistená aj bez explicitného výpočtu jednoduchou rozmerovou analýzou.

CASIMIROV JAV PRE $T > 0$

Zovšeobecnenie Casimirovho výpočtu sily medzi dvojicou rovnobežných neutrálnych platní na nenulovú teplotu bolo uskutočnené v originálnych prácach [6, 7].

Ak udržujeme dvojicu vodivých platní na určitej teplote $T > 0$, fotóny medzi platňami sú termalizované na rovnakej teplote vďaka interakcii s atómami týchto platní. Takto sa každý mód Hamiltoniánu EM poľa (13) správa ako harmonický oscilátor pri teplote T . Partičná funkcia harmonického oscilátora s frekvenciou ω je

$$Z = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (m+1/2)} = e^{-(1/2)\beta \hbar \omega} / (1 - e^{-\beta \hbar \omega}), \quad (27)$$

kde $\beta = 1/k_B T$ je inverzná teplota; Boltzmannova konštanta $k_B \approx 1,381 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$. Odpovedajúca voľná energia F^T , definovaná vzťahom $-\beta F^T = \ln Z$, má tvar

$$F^T(\omega) = \frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}). \quad (28)$$

Celková voľná energia EM poľa medzi platňami je súčtom voľných energií všetkých módov,

$$F_A^T = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} F^T(\omega_{\mathbf{k}}). \quad (29)$$

V limite nekonečnej plochy ľubovoľnej z vodivých platní $S \rightarrow \infty$, môže byť sumácia cez \mathbf{k} nahradená pomocou vzťahu (16) následovne:

$$F^T(L) = 2 \frac{S}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 q F^T[\omega_n(q)], \quad (30)$$

kde frekvencie $\omega_n(q)$ sú definované vzťahom (18). Odpovedajúca sila na jednotku plochy pochádzajúca z oblasti Λ je

$$f^T(L) = - \frac{\partial}{\partial L} \left[\frac{F^T(L)}{S} \right], \quad (31)$$

výsledná sila pôsobiaca na platňový kondenzátor je rovná $\bar{f}^T(L) = f^T(L) - f^T(L \rightarrow \infty)$. Po jednoduchých úpravách získame túto silu v tvare

$$\bar{f}^T(L) = - \frac{2}{\pi \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dq q \alpha_n (e^{2Lq_n} - 1)^{-1}, \quad (32)$$

kde q_n je definované následovne:

$$q_n^2 = q^2 + \frac{\xi_n^2}{c^2}, \quad \xi_n = \frac{2\pi n}{\hbar \beta}. \quad (33)$$

Veličiny ξ_n sú známe ako Matsubarove frekvencie. Formula (32) môže byť zjednodušená následovne:

$$\bar{f}^T(L) = - \frac{1}{4\pi \beta L^3} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nt}^{\infty} dy y^2 \frac{1}{e^y - 1}, \quad (34)$$

kde

$$t = \frac{4\pi L}{\hbar c \beta} \equiv \frac{4\pi k_B}{\hbar c} TL \quad (35)$$

je bezrozmerný parameter, ktorý vyjadruje pomer medzi vzdialenosťou platní a tepelnou vlnovou dĺžkou fotónu.

Malé hodnoty parametra t zodpovedajú nízkym teplotám T alebo malým vzdialenostiam medzi platňami L , kedy dominujú kvantové efekty. Použijúc Eulerovu–Maclaurinovú sumačnú formulu (24), z rovnice (34) získame rozvoj v malom t nasledovného tvaru:

$$\begin{aligned} \bar{f}^T(L) = & - \frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{L^4} - \frac{\pi^2}{45} \frac{1}{(\hbar c)^3 \beta^4} \\ & + \frac{1}{\beta L^3} O(e^{-4\pi^2/t}), \quad t \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Vedúci člen rozvoja odpovedá výsledku (25) pre vákuovú $T = 0$ Casimirovu silu; stojí za povšimnutie, že pre $T > 0$ nie je nutné zaviesť do formalizmu regularizačnú funkciu $\chi(\omega/\omega_c)$. Druhý člen $\propto T^4$ je hlavnou korekciou k vákuovej Casimirovej sile, ďalšie korekcie sú exponenciálne malé pre $t \rightarrow 0$.

Veľké hodnoty parametra t odpovedajú vysokým teplotám T alebo veľkým vzdialenostiam medzi platňami L , kedy klasická limita kvantovej mechaniky poskytuje adekvátny popis systému. V limite $t \rightarrow \infty$ člen s $n = 0$ dominuje v sumácii (34), čo implikuje

$$\bar{f}^T(L) = - \frac{\zeta(3)}{4\pi \beta L^3} + \frac{1}{\beta L^3} O(e^{-t}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (37)$$

$\zeta(p)$ označuje Riemannovu dzeta funkciu definovanú ako

$$F^T(p) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^p}. \quad (38)$$

EXPERIMENTY

Experimenty dokumentujúce Casimirov jav sa uskutočňujú pri izbovej teplote $T = 300 \text{ K}$. Pre zvyčajnú vzdialenosť platní $L \sim 10^{-6} \text{ m}$ platí $4\pi^2/t = \pi \hbar c \beta / L \approx 24$. To znamená, že sme v reži-

me malých hodnôt parametra t , pričom teplotná korekcia v poslednom člene rovnice (36) má zanedbateľný argument e^{-24} . Pomer medzi druhým a prvým členom rozvoja (36) je pri izbovej teplote približne $1,5 \times 10^{-3}$, t.j. Casimirova sila je prakticky plne určená svojou vákuovou hodnotou (25). Z tohto hľadiska sú merania pri izbovej teplote vlastne ekvivalentné meraniam pri teplote absolútnej nuly.

Experimenty s planárnymi platňami sú relatívne komplikované, pretože je nutné precízne dodržať rovnobežnosť platní. Najhodnovernejšie výsledky boli pravdepodobne získané v nedávnej práci [8], kde sa s veľkou presnosťou potvrdil L^{-4} pokles Casimirovej sily (25). Taktiež, ak definujeme Casimirovu amplitúdu $K_C = \pi^2 \hbar c / 240$, jej vypočítaná hodnota $K_C = 1,3 \times 10^{-27} \text{ Nm}^{-2}$ je v dobrej zhode s nameňovanou hodnotou $K_C = (1,22 \pm 0,18) \times 10^{-27} \text{ Nm}^{-2}$. Z toho vyplýva, že Casimirova formula (25) pre silu pri nulovej teplote je experimentálne overená s dostatočnou presnosťou.

Prvé experimenty boli uskutočnené pre inú geometriu experimentálneho zariadenia, konkrétne pre konfiguráciu platňa a guľa zobrazenú na obr. 2, ktorá umožňuje vyhnúť sa problému precíznej rovnobežnosti platní. Výpočet vákuovej Casimirovej sily pre konfiguráciu platňa a guľa bol navrhnutý Derjaguinom [3]. Ak je polomer gule R podstatne väčší ako vzdialenosť L medzi povrchom gule a platňou, $R \gg L$, príťažlivá vákuová sila je rovná

$$\bar{f}^0(L, R) = -\frac{\pi^3 \hbar c}{360} \frac{R}{L^3}. \quad (39)$$

Táto formula bola s dobrou presnosťou overená v experimente s polomerom gule zafixovanom na hodnote $R = (98,0 \pm 0,25) \mu\text{m}$ [9]. Experimentálne výsledky pre Casimirovu silu ako funkciu vzdialenosti L sú znázornené na obr. 3 ako prázdne štvorce. Prerušovaná čiara odpovedá teoretickému výsledku (39); je zrejme, že súlad medzi experimentom a teóriou sa zhoršuje pri znižovaní vzdialenosti L . Keď autori zahrnuli do formuly pre Casimirovu silu korekcie spôsobené konečnou vodivosťou materiálov a nerovnosťou povrchov (plná čiara), súlad medzi experimentom a teóriou je výborný v celom intervale vzdialeností L .

DIELEKTRICKÉ PLATNE

Lifšic vo svojej práci [10] rozšíril odvodenie Casimirovej sily na prípad identických platní vyrobených z ľubovoľného dielektrického materiálu s frekvenčne závislou dielektrickou funkciou (permitivitou) $\epsilon(\omega)$. Jeho štartujúcim bodom boli fluktuácie nábojov, resp. dipólov vo vnútri platní ako aj fluktuácie EM poľa, a preto tento model dielektrík, resp. vodiča nie je inertným. Lifšicova teória, formulovaná v rámci stochastických EM polí, je relatívne komplikovaná, a preto sa obmedzím iba na načrtnutie jej základných myšlienok.

Šírenie sa EM žiarenia s oscilujúcimi komponentami intenzity elektrického poľa $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re[\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\omega t}]$ a magnetickej indukcie

$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \Re[\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\omega t}]$ v dielektrickom médiu s nulovým celkovým nábojom (magneticke vlastnosti ignorujeme, $\mathbf{H} = \mathbf{B}$) je zvyčajne popísané makroskopickými Maxwellovými rovnicami:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad \nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i \frac{\omega}{c} \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega); \quad (40)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad \nabla \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = -i \frac{\omega}{c} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega). \quad (41)$$

Indukcia elektrického poľa \mathbf{D} je daná rovnicou

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + 4\pi \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega), \quad (42)$$

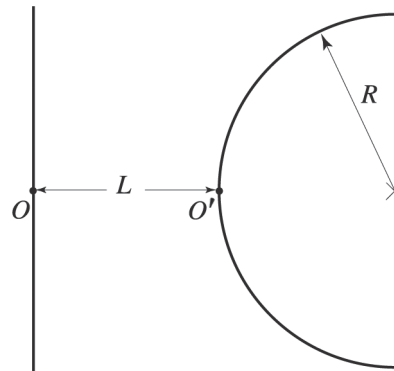
kde polarizácia \mathbf{P} odráža polarizačné efekty dielektrickej hmoty. V jednoduchej makroskopickej elektrodynamickej teórii, ktorá ignoruje kvantové fluktuácie efekty vznikajúce v procese interakcie hmoty a EM žiarenia, platí lineárny vzťah

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (43)$$

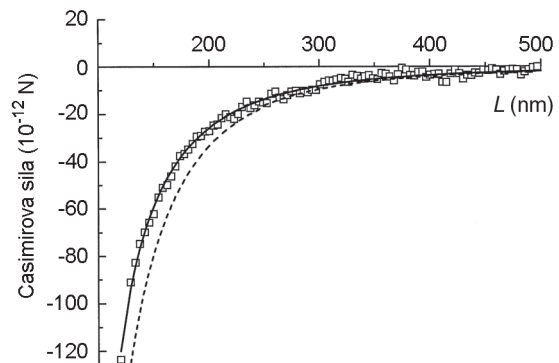
Lifšic v snahe zahrnúť aj fluktuácie efekty predpokladal, že polarizácia pozostáva z dvoch častí

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{K}(\mathbf{r}, \omega), \quad (44)$$

kde $\bar{\mathbf{P}}$ je deterministická časť a \mathbf{K} reprezentuje náhodné pole s nulovou strednou hodnotou $\bar{\mathbf{K}} = 0$



2 Konfigurácia platňa a guľa



3 Experimentálne výsledky [9] pre Casimirovu silu konfigurácie platňa a guľa ako funkcie vzdialenosti L

v každom bode priestoru; čiaru nad poľovou premennou treba chápať ako ustrednenie cez kvantový termodynamický súbor. Vzťah (43) stále platí pre ustrednené polia

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (45)$$

s rovnakou hodnotou $\epsilon(\omega)$, a teda pre fluktuujúce pole je vzťah (43) nahradený nasledovným:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{K}(\mathbf{r}, \omega). \quad (46)$$

Makroskopické Maxwellove rovnice (40), (41) potom platia len pre ustrednené polia $\bar{\mathbf{E}}$ a $\bar{\mathbf{B}}$. Keď zoberieme do úvahy náhodnú polarizáciu v (46), zodpovedajúce náhodné EM pole spĺňa rovnice

$$\nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i \frac{\omega}{c} \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega), \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) &= -i \frac{\omega}{c} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) \\ &= -i \frac{\omega}{c} \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - i \frac{\omega}{c} \mathbf{K}(\mathbf{r}, \omega). \end{aligned} \quad (48)$$

Zavedenie náhodného poľa \mathbf{K} pre polarizáciu je veľmi podobné zavedeniu „náhodnej sily“ v Langevinovej teórii Brownovho pohybu, kde systematické efekty prostredia (deterministická sila a odpor) sú oddelené od stochastickej sily s nulovou strednou hodnotou, majúcou pôvod v mikroskopických zrážkach. Podobne ako v teórii Brownovho pohybu je potrebné definovať autokorelačnú funkciu náhodného \mathbf{K} -poľa s komponentami K_μ ($\mu = x, y, z$). Zo samotnej povahy zavedenia náhodného poľa v makroskopickej fluktuáčnej teórii, v ktorej sú atómové vzdialenosti považované za zanedbateľne malé, má táto autokorelácia charakter δ -funkcie a fluktuáčno-disipačný teorém implikuje zodpovedajúci prefaktor:

$$\begin{aligned} \overline{K_\mu(\mathbf{r}, \omega) K_\nu(\mathbf{r}', \omega')} \\ = 2\hbar \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \delta_{\mu\nu} \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (49)$$

Lifšic vyriešil kvantový problém stochastických Maxwellových rovníc (47), (48) s autokorelačnou funkciou náhodného poľa (49) pre systém rovnobežných dielektrických platní vo vzdialenosti L . Pre Casimirovu príťažlivú silu medzi platňami dostal výsledok

$$\begin{aligned} \bar{f}^T(L) &= -\frac{1}{\pi\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dq q q_n \left\{ \left(\frac{e^{2Lq_n}}{r_{\perp,n}^2} - 1 \right)^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{e^{2Lq_n}}{r_{\perp,n}^2} - 1 \right)^{-1} \right\}, \end{aligned} \quad (50)$$

kde $r_{\parallel,n}$ a $r_{\perp,n}$ ($n = 0, 1, \dots$) sú reflektčné koeficienty transversálneho elektrického a magnetického módu definované nasledovne:

$$\frac{1}{r_{\perp,n}^2} = \left[\frac{\epsilon(i\xi_n)q_n + k_n}{\epsilon(i\xi_n)q_n - k_n} \right]^2, \quad \frac{1}{r_{\parallel,n}^2} = \left[\frac{q_n + k_n}{q_n - k_n} \right]^2; \quad (51)$$

Matsubarove frekvencie ξ_n a funkcie q_n sú uvedené v rovnici (33), veličiny k_n sú dané vzťahom

$$k_n^2 = q^2 + \epsilon(i\xi_n) \frac{\xi_n^2}{c^2}. \quad (52)$$

PROTIREČENIA

Podobne ako v prípade ideálne vodivých platní, je možné uskutočniť analýzu Casimirovej sily (50) v oblasti malých a veľkých hodnôt parametra t (35). Predpokladajme pre jednoduchosť, že dielektrická permitivita materiálu platní je frekvenčne nezávislá, $\epsilon(\omega) = \epsilon$.

Prípád malých hodnôt parametra $t \rightarrow 0$ (nízke teploty T , resp. malé vzdialenosti medzi platňami L) je nekontroverzný. Pre prípad ideálne vodivých platní s $\epsilon \rightarrow \infty$ získame štandardný rozvoj Casimirovej sily (36).

V limite veľkých hodnôt parametra $t \rightarrow \infty$ (vysoké teploty T , resp. veľké vzdialenosti medzi platňami L), v sumácii (50) opäť dominuje člen s $n = 0$. Matsubarova frekvencia nulového $n = 0$ módu je rovná nule, z čoho vyplýva $q_0 = k_0 = q$; zodpovedajúce reflektčné koeficienty (51) sú určené vzťahmi

$$r_{\parallel,0} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}, \quad r_{\perp,0} = 0. \quad (53)$$

Skutočnosť, že reflektčný koeficient $r_{\perp,0} = 0$ nuluje príspevok druhého člena na pravej strane rovnice (50), prvý člen je nenulový a dáva

$$\bar{f}^T(L) \approx -\frac{1}{16\pi\beta L^3} \int_0^{\infty} dq \frac{q^2}{((\epsilon + 1)/(\epsilon - 1))^2 e^q - 1}, \quad (54)$$

V limite ideálne vodivých platní ($\epsilon \rightarrow \infty$) dostaneme

$$\bar{f}^T(L) \approx -\frac{\zeta(3)}{8\pi\beta L^3}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (55)$$

Keď porovnáme tento výsledok s výsledkom (37) predchádzajúcej analýzy založenej na inertnom popise ideálneho vodiča, vidíme ich disproporcii vo faktore 1/2.

Vrcholom mnohých snáh pochopiť nesúlad medzi vysokoteplotnými formulami (37) a (55) pre Casimirovu silu bola práca [11] J. Schwingera a jeho spolupracovníkov. Kľúčom k vyriešeniu problému je podľa týchto autorov porovnanie výrazu pre Casimirovu silu (32), platnom v limite $\epsilon \rightarrow \infty$, a výrazu (50), platnom pre ľubovoľnú hodnotu ϵ . Výrazy sa evidentne zhodujú ak reflektčné koeficienty $r_{\parallel,n}$ a $r_{\perp,n}$ sú rovné jednotke. Z definície reflektčných koeficientov (51) je zrejmé, že v limite $\epsilon(\omega) \rightarrow \infty$ sú naozaj všetky reflektčné koeficienty módu s $n \geq 1$ rovné jednotke. Ako vyplýva z rovnice (53), taktiež $r_{\parallel,0} = 1$. Jediným sporným je reflexný koeficient

nulového módu $r_{\perp,0}$. Pre konečnú hodnotu ϵ tento koeficient naozaj ide k nule pre $n = 0$, ako je to uvedené v rovnici (53). Ak $\epsilon(\omega) \rightarrow \infty$, koeficient $r_{\perp,0}$ nie je jednoznačne definovaný, pretože jeho hodnota závisí od poradia limit $\epsilon(\omega) \rightarrow \infty$ a $n \rightarrow 0$. S cieľom reprodukovať výsledok (32), Schwinger a jeho spolupracovníci postulovali nasledovné poradie limit: polož najprv $\epsilon(\omega) \rightarrow \infty$ a až potom uvažuj $n = 0$. Tento predpis implikuje $r_{\perp,0} = 1$ pre ideálne vodivé platne, a teda platí výsledok (32) s rozvoji Casimirovej sily (36) v limite $t \rightarrow 0$ a (37) v limite $t \rightarrow \infty$. Vysokoteplotný výsledok pre inertné vodivé platne (37) nazveme pre jednoduchosť Schwingerovou formulou. Je potrebné si všimnúť, že popísaná procedúra vnáša nespojitosť do vysokoteplotného výrazu pre Casimirovu silu: ak je dielektrická permitivita platní ϵ konečná, platí výsledok (54), ak $\epsilon = \infty$, platí výsledok (37), ktorý je dvojnásobne väčší ako analytické predĺženie formuly (54) v limite $\epsilon \rightarrow \infty$. Napriek tejto „podozrivej“ skutočnosti sa fyzici uspokojili so Schwingerovým vysvetlením vysokoteplotného paradoxu na ďalších 20 rokov.

Experimenty sa uskutočňujú na reálnych vodičoch zložených z kvantových častíc, s konečnou statickou vodivosťou σ a plazmovou frekvenciou ω_p , definovanou vzťahom $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n/m$, kde e je jednotkový náboj a n je hustota voľných elektrónov hmotnosti m . Pre takéto reálne vodiče existuje Drudeho formula popisujúca frekvenčne závislú permitivitu $\epsilon(\omega)$:

$$\epsilon(\omega) \sim \frac{4\pi i \sigma}{\omega} \quad \text{pre } \omega \rightarrow 0, \quad (56)$$

$$\epsilon(\omega) \sim 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{pre } \omega \gg \omega_p^2 / (4\pi\sigma). \quad (57)$$

Uvažovanie frekvenčne závislej permitivity $\epsilon(\omega)$ umožňuje vyhnúť sa umelému predpisu pre poradie limit: je to samotná dynamika časticového systému, ktorá si „vyberie“ správne zohľadnenie príspevku nulového módu. V prácach [12, 13] bola použitá Drudeho formula (56) pri výpočte reflexných koeficientov (51) nulového módu $n = 0$. Výsledkom boli reflexné koeficienty $r_{\parallel,0} = 1$ a $r_{\perp,0} = 0$, nezávisle od hodnoty vodivosti σ . Dôsledkom je skutočnosť, že Lifšicov výsledok (55) sa javí ako ten správny pre vysokoteplotnú asymptotiku Casimirovej sily.

V práci [14] bolo argumentované, že uvažovanie Drudeho formuly (56) v oblasti nízkych teplôt vedie k narušeniu Nernstovho teorému (nulovosť entropie pri $T = 0$). Intenzívna polemika o Casimirovom jave pretrváva dodnes.

VYSOKOTEPLTNÁ OBLASŤ

V tejto časti sa zameriam na vysokoteplotné aspekty Casimirovho javu. Ako je zrejmé z predošlého, existuje zjavná diskrepancia o faktor 1/2 medzi vysokoteplotnou Schwingerovou formulou (37), platnou pre platne zhotovené z inertného ideálneho vodiča, a Lifšicovou formulou (55), platnou pre fluktuujúce vodivé platne. Mojim cieľom je vysvet-

liť túto diskrepanciu na základe presnej analýzy mikroskopických časticových systémov, ktoré modelujú vodivé platne v Casimirovom experimente v EM poli [15].

Vo vysokoteplotnej limite dochádza k dvom podstatným zjednodušeniam modelového systému:

- V súlade s princípom korešpondencie, v mikroskopickom modeli hmoty interagujúcej s EM žiarením môžu byť obe časti, hmota aj žiarenie, uvažované ako klasické vo vysokoteplotnej limite. Absencia kvantových efektov sa prejavuje nezávislosťou vedúcich členov rozvojev (37) a (55) od Planckovej konštanty \hbar .
- Aplikácia Bohrovho–van Leeuwenovho teorému [16, 17] vedie k oddeleniu medzi klasickou hmotou a klasickým žiarením, ako aj k efektívnej eliminácii magnetických síl v hmote. Detailná analýza tejto témy bola publikovaná v článku [18]; v ďalšom si pripomenieme základný argument, ktorý je veľmi jednoduchý. Uvažujme EM žiarenie v coulombovskej kalibrácii s $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, kde vektorový potenciál \mathbf{A} obsahuje súčet vektorových potenciálov EM žiarenia a magnetickej časti časticových interakcií. Coulombovská interakcia medzi časticami je zahrnutá v skalárnom potenciáli U . V integráli klasickej Gibbsovej váhy cez fázový priestor

$$\int d\mathbf{r} \int d\mathbf{p} \exp \left[-\beta \frac{(\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2}{2m} \right] \exp[-\beta U(\mathbf{r})] \quad (58)$$

možno uskutočniť najprv integráciu cez momenty pre zafixované súradnice \mathbf{r} . Substitúcia premenných \mathbf{p} na $\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r})$ vedie k integrálu cez \mathbf{r} , ktorý je nezávislý od vektorového potenciálu \mathbf{A} , resp. magnetických stupňov voľnosti. Absencia relativistických efektov sa prejavuje nezávislosťou vedúcich členov rozvojev (37) a (55) od rýchlosti svetla c .

Takto mikroskopická hmota zložená z nabitých častíc môže byť v limite $t \rightarrow \infty$ považovaná za klasickú hmotu, neovplyvňovanú EM žiarením, pričom náboje interagujú iba cez okamžitý coulombovský potenciál.

V tejto súvislosti by som chcel poukázať na závažný nedostatok modelu inertných vodivých platní. V tomto modeli vzniká Casimirova sila výlučne výberom módov medzi platňami vďaka okrajovým podmienkam (3) na povrchoch platní. Ale keďže vo vysokoteplotnej oblasti sú vodivá časticová hmota a EM žiarenie navzájom oddelené a neinteragujú (hmota je pre žiarenie „priesvitná“), jediným zdrojom Casimirovej sily v tejto oblasti môžu byť iba fluktuácie náboja vo vnútri vodičov. Z uvedeného je zrejmé zlyhanie makroskopického inertného modelu vodivých platní, a teda neplatnosť Schwingerovej formuly (37). Zostáva nám už iba ukázať, že fluktuácie náboja v mikroskopických coulombovských modeloch platní naozaj vedú k Lifšicovej vysokoteplotnej formule (55).

Vysokoteplotná oblasť coulombovských fluidov je presne popísateľná teóriou Debye a Hüc-

kela (DH). Rigorózne podmienky, za ktorých DH aproximácia dáva presnú korekciu k ideálnemu plynu, boli v minulosti témou mnohých štúdií; ich historický prehľad je uvedený napr. v práci [19]. Casimirov problém mikroskopických coulombovských fluidov bol vyriešený pomocou nehomogénnej verzie DH teórie v dvoch prácach: článok [20] sa tiež zaoberá komplexnejšími fyzikálnymi situáciami; článok [21] ide za DH teóriu. Označiac ako $\chi = \sqrt{4\pi\beta e^2 n}$ inverznú korelačnú Debyeovu dĺžku časticového systému, asymptotický rozvoj Casimirovej sily v limite $\chi L \rightarrow \infty$ bol získaný v nasledovnom tvare [20]

$$\bar{f}^T(L) = -\frac{\zeta(3)}{8\pi\beta L^3} \left\{ 1 - \frac{6}{\chi L} + O\left(\frac{1}{(\chi L)^2}\right) \right\}. \quad (59)$$

Vedúci univerzálny člen tohto rozvoja je identický s Lifšicovým výsledkom (55), ako sme očakávali. Korekčný člen je neuniverzálny a závisí od zloženia coulombovského fluidu cez Debyeov parameter χ .

Vysvetlenie zlyhania makroskopického inertného opisu mikroskopických coulombovských modelov je možné vysvetliť na základe tzv. sumačných fluktuačných pravidiel. V mikroskopickom modeli hustota náboja a zodpovedajúci elektrický potenciál/pole fluktuujú, dokonca aj pre extrémne veľké hodnoty fyzikálnych parametrov ako je hustota častíc, čo zodpovedá prípadu ideálneho vodiča. Aby som bol presnejší, uvažujme nábojovú korelačnú funkciu

$$\begin{aligned} S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \langle \hat{\rho}(\mathbf{r}) \hat{\rho}(\mathbf{r}') \rangle - \langle \hat{\rho}(\mathbf{r}) \rangle \langle \hat{\rho}(\mathbf{r}') \rangle \\ &\equiv \langle \hat{\rho}(\mathbf{r}) \hat{\rho}(\mathbf{r}') \rangle^T, \end{aligned} \quad (60)$$

kde mikroskopická nábojová hustota $\hat{\rho}$ je definovaná ako sumácia cez častice $\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_j q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ a symbol $\langle \dots \rangle$ označuje ustrednenie cez rovnovážny súbor. V prípade nekonečného priestoru, skutočnosť, že Fourierova transformácia coulombovskej interakcie $v(\mathbf{r}) = 1/r$ má singulárny tvar $\tilde{v}(\mathbf{k}) = 4\pi/k^2$, implikuje nasledovné správanie sa Fourierovej transformácie (60) vzhľadom k $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ [22]:

$$\tilde{S}(k) = \frac{1}{4\pi\beta} k^2 + O(k^4). \quad (61)$$

Takto druhý moment $S(r)$ *nezávisí* od hustoty častíc $n = \langle \sum_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \rangle$ a prežíva aj v oblasti vysokých hustôt. Okamžitým dôsledkom rovnice (61) je asymptotická fluktuačná formula pre ďalekosahovú korelačnú funkciu indukovaných potenciálov [23]

$$\beta \langle \hat{\phi}(\mathbf{r}) \hat{\phi}(\mathbf{r}') \rangle^T \sim \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{ v limite } |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty, \quad (62)$$

kde $\hat{\phi}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' v(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \hat{\rho}(\mathbf{r}')$ je mikroskopický elektrostatický potenciál vytvorený v bode \mathbf{r} systémom nabitých častíc a vzdialenosť $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ je veľká v porovnaní s mikroskopickou škálou (korelačnou dĺžkou krátkodosahových časticových korelácií). Keďže mikroskopické elektrické pole $\hat{\mathbf{E}}$ je dané

ako $\hat{E}_\mu = -\partial_\mu \hat{\phi}(\mathbf{r})$ ($\mu = x, y, z$), asymptotický tvar korelačnej funkcie elektrických polí vyplýva priamo z formuly (62):

$$\begin{aligned} \beta \langle \hat{E}_\mu(\mathbf{r}) \hat{E}_\nu(\mathbf{r}') \rangle^T &\sim \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \left[3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_\mu (\mathbf{r} - \mathbf{r}')_\nu \right. \\ &\quad \left. - \delta_{\mu\nu} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \right]. \end{aligned} \quad (63)$$

Je samozrejmé, že platí $\langle \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \rangle = 0$, keďže ustrednený elektrický potenciál je konštantný vo vnútri vodiča. Na druhej strane, asymptotická formula (63) nám hovorí, že v každom bode priestoru existujú nenulové tepelné fluktuácie elektrického poľa okolo nulovej hodnoty pre ľubovoľnú hustotu častíc n .

Zovšeobecnenie fluktuačných formúl pre nekonečný coulombovský systém na nehomogénne situácie v centre nášho záujmu, ako sú vodiče s hranicou v kontakte s vákuom, bolo uskutočnené v práci [24]. Pokiaľ sú oba body \mathbf{r} a \mathbf{r}' vo vnútri vodiča, asymptotické formuly (62) a (63) zostávajú v platnosti. Keď jeden z bodov leží na hranici vodiča, tangenciálna komponenta elektrického poľa v tomto bode stále fluktuuje podľa formuly (63). Tento fluktuačný jav má za následok neadekvátnosť „inertného“ matematického opisu mikroskopických modelov, pretože v tomto opise sú tangenciálne komponenty elektrického poľa na hranici (3) striktné zafixované na nulu, a teda nefluktuujú.

ZÁVER

V tomto prehľadovom článku som načrtnol problémy spojené s teoretickým výpočtom Casimirovej sily medzi dvoma neutrálnymi ideálne vodivými platňami v EM poli.

Matematický model inertných vodivých platní, použitý Casimirov pri výpočte sily pri teplote absolútnej nuly, je založený na nulových okrajových podmienkach pre tangenciálne komponenty elektrického poľa (3) na povrchu vodičov. Zdá sa, že získané teoretické výsledky pre Casimirovu silu sú v súlade s experimentálnymi dátami pri nulovej teplote a možno aj pre dostatočne nízke teploty. Prečo kvantové fluktuácie základného stavu v reálnych vodivých platniach nehrajú žiadnu úlohu, je otvorenou otázkou.

Problémom je oblasť vysokých teplôt, konkrétne rozdiel medzi asymptotickým výsledkom pre silu (37), získaným triviálnym zovšeobením Casimirovho inertného popisu vodivých platní, a výsledkom (55) Lifšicovho fluktuačného popisu interakcie EM žiarenia a vodivého materiálu platní. Na základe rigorózneho analýzy vysokoteplotnej oblasti ukazujem, že v tejto oblasti reálnej mikroskopickej hmoty zloženej z kvantových častíc odpovedá Lifšicov popis. Jediným zdrojom pre Casimirovu silu vo vysokoteplotnej oblasti sú fluktuácie náboja vo vodivých platniach. Inými slovami, prítomnosť EM žiarenia je irelevantná. Táto skutočnosť je aj v súčasnosti pre väčšinu fyzikov pracujúcich v danej oblasti neznámou a zrejme potrvá dlhší čas kým prejde do vedomia komunity.

Z experimentálneho hľadiska je vysokoteplotná

oblasť (rádovo tisíce K) komplikovanejšia, pretože kovy sa v nej menia na tekuté elektrolyty. Napriek tomu by bolo zvýšené experimentálne úsilie odmenené jednoznačným potvrdením, resp. vyvrátením existujúcich teórií, pretože teórie sa navzájom markantne líšia práve v oblasti vysokých teplôt.

Na záver by som chcel zdôrazniť skutočnosť, že Casimirov jav nie je akademickým problémom. Jeho dôkladné pochopenie vo všetkých teplotných režimoch je nevyhnutným predpokladom pre všeobecný popis kvantovej interakcie EM žiarenia a hmoty, ktoré sú vo vzájomnej tepelnej rovnováhe.

POĎAKOVANIE

Výsledky, ktoré sú zhrnuté v kapitole Vysokoteplotná oblasť, vznikli v rámci jednej z tém mojej dlhoročnej spolupráce s Bernardom Jancovicim z Parížskej univerzity v Orsay; táto spolupráca mi aj dnes prináša veľké potešenie a množstvo nových podnetov. Spolupráca bola podporená grantom NATO a MAD medzi CNRS a SAV (No. 18194). Mój výskum sčasti podporila aj Vedecká grantová agentúra Ministerstva školstva SR a SAV (grant VEGA č. 2/6071/2006).

LITERATURA

- [1] H. B. G. Casimir, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. **B 51**, 793 (1948).
- [2] V. M. Mostepanenko, N. N. Trunov: *The Casimir Effect and its Applications*, Clarendon Press, Oxford 1997.
- [3] K. A. Milton: *The Casimir effect*, World Scientific, Singapore 2001.
- [4] M. Bordag, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko, Phys. Rep. **353**, 1 (2001).
- [5] K. A. Milton, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, R209 (2004).
- [6] M. Fierz, Helv. Phys. Acta **33**, 855 (1960).
- [7] J. Mehra, Physica **37**, 145 (1967).
- [8] G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio, G. Ruoso, Phys. Rev. Lett. **88**, 041804 (2002).
- [9] U. Mohideen, A. Roy, Phys. Rev. Lett. **81**, 4549 (1998).
- [10] E. M. Lifšic, Sov. Phys. JETP **2**, 73 (1956).
- [11] J. Schwinger, L. L. DeRaad, K. A. Milton, Ann. Phys. (N.Y.) **115**, 1 (1978).
- [12] M. Boström, B. E. Sernelius, Phys. Rev. Lett. **84**, 4757 (2000).
- [13] J. S. Høye, I. Brevik, J. B. Aarseth, K. A. Milton, Phys. Rev. E **71**, 056101 (2005).
- [14] B. Geyer, G. L. Klimchitskaya, V. M. Mostepanenko, Phys. Rev. A **67**, 062102 (2003).
- [15] B. Jancovici, L. Šamaj, Europhys. Lett. **72**, 35 (2005).
- [16] N. Bohr: *Dissertation*, Copenhagen 1911.
- [17] J. H. van Leeuwen, J. Phys. (Paris) **2**, 361 (1921).
- [18] A. Alastuey, W. Appel, Physica A **276**, 508 (2000).
- [19] D. C. Brydges, Ph. A. Martin, J. Stat. Phys. **96**, 1163 (1999).
- [20] B. Jancovici, L. Šamaj, J. Stat. Mech., P08006 (2004).
- [21] P. R. Buenzli, Ph. A. Martin, J. Stat. Phys. **119**, 273 (2005).
- [22] Ph. A. Martin, Rev. Mod. Phys. **60**, 1075 (1988).
- [23] J. L. Lebowitz, Ph. A. Martin, J. Stat. Phys. **34**, 287 (1984).
- [24] B. Jancovici, J. Stat. Phys. **80**, 445 (1995).